Գ.Ս. ՆԻԿՈՂՈՍՅԱՆ, Վ.Ֆ. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՁԵՌՆԱՐԿ ԽՆԴՐԱԳԻՐՔ

ԳՅՈՒՄՐԻ
2024

Գ. Ս. ՆԻԿՈՂՈՍՅԱՆ, Վ. Ֆ. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՁԵՌՆԱՐԿ ԽՆԴՐԱԳԻՐՔ

ՍՈՎՈՐՈՂՆԵՐԻ ԵՎ ՍՈՎՈՐԵՑՆՈՂՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

ԳՅՈՒՄՐԻ
ՀԵՂԻՆԱԿԱՅԻՆ ՀՐԱՏԱՐԱԿՈՒԹՅՈՒՆ
2024

ՀՏԴ 51(07)
ԳՄԴ 22.1g7
Ն 702

Հրատարակության է երաշխավորված Շիրակի Մ. Նալբանդյանի անվան պետական համալսարանի գիտական խորհրդի 27.09.2024թ. նիստի N2/2 որոշմամբ:

Խմբագիր՝
ֆիզմաթ գիտ. թեկնածու, դոցենտ
Մարգարյան Լիլիթ

Հետազոտությունն իրականացվել է ՀՀ գիտության կոմիտեի ֆինանսական աջակցությամբ՝ 21T-5C039 ծածկագրով գիտական թեմայի շրջանակներում:

Նիկողոսյան Գ. Ս., Մանուկյան Վ. Ֆ.

Ն 702 Մաթեմատիկայի ձեռնարկ խնդրագիրք սովորողների և սովորեցնողների համար։ Ուսումնաօժանդակ ձեռնարկ.- Գյումրի: Հեղ. հրատ., 2024.- 186 էջ։

Ձեռնարկը նվիրված է մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում ապացուցման և/կամ հերքման խնդիրների, անորոշ հավասարումների, իրական թվի ամբողջ կամ կոտորակային մաս պարունակող հավասարումների և անհավասարումների լուծման, անհավասարությունների ապացուցման, վերջավոր գումարների հաշվման տարբեր տարրական եղանակների հնարավոր արդյունավետ կիրառությունների վեր հանմանը։

Ձեռնարկը հասցեագրված է միջին և ավագ դպրոցում մաթեմատիկա դասավանդողներին, բուհերի ֆիզիկամաթեմատիկական ֆակուլտետների ուսանողներին, միջին և ավագ դպրոցի աշակերտներին։ Նախատեսված է այն սովորողների և սովորեցնողների համար, ովքեր սիրում են մաթեմատիկան, նախապատրաստվում են մաթեմատիկական օլիմպիադաներին։ Այն կարող է կիրառվել նաև մաթեմատիկայի արտադասարանական դասընթացներում և խմբակներում։

ՀՏԴ 51(07)
ԳՄԴ 22.1g7

ISBN 978-9939-0-5045-4

ՆԱԽԱԲԱՆ

Սույն ձեռնարկում ի մի են բերված և խորացված ներկայացված են մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում գրեթե չքննարկվող տարբեր թեմատիկաներ։

Ձեռնարկի հիմնական նպատակն է օգնել սովորողներին և սովորեցնողներին ստանալու լրացուցիչ գիտելիքներ մաթեմատիկայից՝ կրկնելով և խորացնելով դպրոցական դասընթացը։

Հարկ է նշել, որ ձեռնարկում դիտարկված թեմատիկաների վերաբերյալ խնդիրները մշտական առաջադրվում են դպրոցականների մաթեմատիկական օլիմպիադաների տարբեր փուլերում։

Չնայած փոխվում, լավարկվում են առարկայական չափորոշիչները, դասագրքերը, սակայն, ցավոք, դեռևս առկա է ահռելի «խզվածք» մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի ուսումնական և օլիմպիական ծրագրերի միջև։ Այս համատեքստում սույն ուսումնաօժանդակ ձեռնարկը միտված է խթան հանդիսանալու այդ «խզվածքի» լրացման, ինչպես նաև սովորողների որոնողական, տրամաբանական և ստեղծագործական մտածողության ձևավորման և զարգացման համար։

Հետազոտությունն իրականացվել է ՀՀ Բարձրագույն կրթության և գիտության կոմիտեի ֆինանսական աջակցությամբ՝ 21T-5C039 ծածկագրով գիտական թեմայի շրջանակներում։

Ձեռնարկը բաղկացած է 5 պարագրաֆներից: Յուրաքանչյուր պարագրաֆ սկսվում է տվյալ թեմայի վերաբերյալ տեսական նյութի համառոտ շարադրանքով, որին հաջորդում են տվյալ թեմայի շրջանակում համապատասխան օրինակների քննարկումն ու լուծումը, որոնց ընթացքում տրվում են նաև մեթոդական ցուցումներ համանման խնդիրներ լուծելիս կիրառվող արդյունավետ մեթոդների և հնարքների վերաբերյալ:

Յուրաքանչյուր պարագրաֆ ավարտվում է ինքնուրույն լուծման համար նախատեսված, տվյալ թեմային վերաբերող, աստիճանական բարդացման սկզբունքով կազմված խնդիրներով, որոնց վերաբերյալ ձեռնարկի վերջում տրված են պատասխաններ և/կամ լուծման համար ցուցումներ:

Ընդհանուր առմամբ քննարկվող թեմատիկաների շրջանակում ձեռնարկում դիտարկված են 300 տիպային և ոչ տիպային, պարզից մինչև օլիմպիական բարդության խնդիրներ:

Հուսով ենք սույն ձեռնարկը կօգնի սովորողներին և սովորեցնողներին՝ խորացնել և հարստացնել իրենց մաթեմատիկական գիտելիքները:

Սիրով կլսենք նաև հետաքրքրված ընթերցասերի օգտակար դիտողություններն ու առաջարկությունները, որոնք հնարավոր է ուղարկել ձեռնարկի հեղինակային խմբին հետևյալ էլեկտրոնային հասցեով՝ dzernark2024@gmail.com :

§1. Ապացուցման կամ հերքման խնդիրներ: Հակասող ենթադրության մեթոդը:

Մաթեմատիկայի դպրոցական և բուհական դասընթացների շրջանակում հաճախ հանդիպում ենք պնդումների և խնդիրների, որոնց ապացուցման կամ հերքման հիմքում ընկած են տարբեր եղանակներով հիմնավորվող կոնկրետ տրամաբանական դատողությունները, ինչի վառ օրինակ է հակասող ենթադրության մեթոդը:

Մեթոդ բառը ունի հունական ծագում և թարգմանաբար նշանակում է նպատակին հասնելու միջոց, ճանապարհ, եղանակ և ուղի: Այն տրամաբանական տեղեկատուներում սահմանվում է որպես բնության, հասարակության, մտածողության երևույթների ու օրինաչափությունների ուսումնասիրությանն ուղղված կանոնների ու հնարքների համակարգ:

Բովանդակային իմաստով *ապացուցումը* տրամաբանական գործողություն է, որի ընթացքում ինչ-որ մտքի ճշմարտություն հիմնավորվում է այլ մտքերի (դատողությունների) օգնությամբ: Այս տրամաբանական գործողությունն ունի հսկայական պրակտիկ նշանակություն շրջակա աշխարհի ճանաչողության պրոցեսում: Բոլոր գիտություններում էլ (հատկապես բնագիտամաթեմատիկական) ապացուցելու հարկ կա: Ընդ որում, այն մտքերի, դատողությունների բովանդակությունը, որոնց ճշմարիտ լինելը պահանջվում է հիմնավորել, յուրաքանչյուր գիտությունում, բնականաբար, տարբեր է: Տրամաբանություն գիտությունն էլ հենց գտնում է այն ընդհանուրը, որը բնութագրական է բոլոր այդ ապացուցումների համար՝ անկախ այս կամ այն ապացուցման կոնկրետ բովանդակությունից:

Առհասարակ, տրամաբանությունում յուրաքանչյուր բովանդակային ապացուցումում առանձնացնում են երեք կառուցվածքային տարրեր՝ թեզիս, հիմք և կշռադատություն:

Թեզիս կոչվում է այն պնդումը, որի ճշմարիտ լինելը պահանջվում է ապացուցել:

Հիմք կոչվում է այն առաջադրությունը, պնդումը, որի ճշմարիտ լինելը նախկինում արդեն ապացուցված է և որը կարող է օգտագործվել թեզիսի ճշմարիտ լինելը հիմնավորելիս:

Կշռադատությունը կամ *փաստարկումն* այն եղանակն է, որի միջոցով թեզիսի ճշմարիտ լինելը բխում է ապացուցման հիմքերից և փաստարկներից: Ըստ էության կշռադատությունը կիրառված ապացուցման մեթոդն է, որն ապացուցողական մտահանգումների որոշակի հաջորդականություն է:

Առհասարակ տրամաբանության մեջ դիտարկվում են տրամաբանական մտածողության չորս հիմնական օրենքներ, որոնք կազմում են ցանկացած կշռադատության հիմքը: Դրանք են՝ նույնության, հակասության, երրորդի բացառման և բավարար հիմունքի օրենքները:

Նույնության օրենքը պահանջում է, որ յուրաքանչյուր միտք որոշակի, հաստատուն իմաստով կիրառվի կշռադատության ընթացքում: Օրինակ, անթույլատրելի է, որ բազուկ բառը կշռադատության մի փուլում կիրառվի կամ ընկալվի որպես ճակընդեղ, մեկ այլ փուլում՝ որպես ձեռք (թև), իսկ մյուսում՝ ֆիզիկական մեծություն հանդիսացող ուժի բազուկ: Նման կշռադատությունը տրամաբանական չի լինի:

Նույնության օրենքի նշանակությունն այն է, որ նրա պահանջին հետևելով՝ պահպանում ենք մեր մտքերի որոշակիությունը կշռադատելու ընթացքում:

Հակասության օրենքի համաձայն՝ երկու հակադիր դատողություններ չեն կարող միաժամանակ ճշմարիտ լինել:

Բերենք այս օրենքի կիրառման կոնկրետ օրինակներ: Դիտարկենք հակադիր դատողություններ:

Սահքի շփման ուժի մեծությունը կախված չէ մարմինների հպման մակերևույթի մակերեսից:

Սահքի շփման ուժի մեծությունը կախված է մարմինների հպման մակերևույթի մակերեսից:

Կամ.

Ուղիղ պրիզմայի ծավալը կախված չէ հիմքի բազմանկյան մակերեսից:

Ուղիղ պրիզմայի ծավալը կախված է հիմքի բազմանկյան մակերեսից:

Պարզ է, որ վերոգրյալ հակադիր դատողությունները, հակասության օրենքի համաձայն, միաժամանակ չեն կարող լինել ճշմարիտ:

Հակասության օրենքի նշանակությունն այն է, որ նրա պահանջին հետևելով, մենք պահպանում ենք մեր մտքերի անհակասականությունը կշռադատելու ընթացքում:

Անհրաժեշտ է ուշադրություն դարձնել այն էական հանգամանքի վրա, որ հակասության օրենքը տարածվում է հակադիր դատողությունների, այսինքն՝ ինչպես հակադեմ, այնպես էլ հակասող դատողությունների վրա և գտնում է, որ դրանք միաժամանակ ճշմարիտ չեն կարող լինել, բայց այս օրենքը չի բացառում երկու հակադիր դատողությունների միաժամանակյա սխալ լինելը: Այս «բացը» լրացնում է ***երրորդի բացառման օրենքը***, համաձայն որի՝ երկու հակադիր դատողություններից մեկն անպայման ճշմարիտ է, մյուսը կեղծ, երրորդ ելքը բացառված է: Անհրաժեշտ է հստակ ընդգծել, որ երրորդի բացառման օրենքը չի պատասխանում այն հարցին, թե երկու հակադիր դատողություններից որն է ճշմարիտ և որը՝ կեղծ: Այդ հարցի պատասխանը դուրս է մնում այս օրենքի իրավասությունից: Պետք է ի նկատի ունենալ, որ եթե հակասող դատողություններից մեկը ճշմարիտ է, ապա հետևողական պետք է լինենք՝ մյուս դատողությունը սխալ համարենք, և հակառակը:

Երրորդի բացառման օրենքի նշանակությունն այն է, որ նրա պահանջը կատարելով՝ ապահովում ենք մեր մտքի հետևողականությունը:

Եվ վերջապես, ***բավարար հիմունքի օրենքի*** համաձայն, յուրաքանչյուր ճշմարիտ միտք կշռադատության ընթացքում պետք է անհրաժեշտաբար ունենա իր տրամաբանական հիմքը (բխի այլ ճշմարիտ մտքերից):

Բավարար հիմունքի օրենքի նշանակությունն այն է, որ այդ օրենքի պահանջին հետևելով՝ մենք ապահովում ենք մեր մտքերի հիմնավորվածությունը:

Ըստ էության տրամաբանական այս չորս անկյունաքարային օրենքներն իրենց լավագույն դրսևորումն են գտել ապացուցման հիմնական մեթոդներից մեկի՝ հակասող ենթադրության մեթոդի կառուցակարգում:

Այս մեթոդի, որպես տրամաբանական բովանդակային ապացուցման, հիմքը կազմում են հակասության և երրորդի բացառման օրենքները, իսկ կշռադատությունը ներառում է նույնության և բավարար հիմունքի օրենքները:

Հակասող ենթադրության մեթոդի համաձայն՝ ենթադրում ենք, որ ապացուցման ենթակա ելակետային պնդումը սխալ է: Եթե այս ենթադրությունը տրամաբանական դատողությունների միջոցով հանգեցնում է հակասության, եզրակացնում ենք, որ մեր ենթադրությունը սխալ է, այսինքն՝ տրված ելակետային պնդումը ճշմարիտ է:

Ըստ էության A պնդման ճշմարտացիությունն ապացուցելու փոխարեն ապացուցում ենք, որ նրա ժխտումը սխալ է, ինչը, բավարար հիմունքի, հակասության և երրորդի բացառման օրենքների համաձայն, համարժեք է A պնդման ճշմարիտ լինելուն: Այս մեթոդի տրամաբանական հիմքը հանդիսանում է կոնտրապոզիցիայի կանոնը, որը հիմնված է $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ տավտալոգիայի վրա:

Առհասարակ ապացուցման մեթոդներն, ըստ տանելու եղանակի, դասակարգվում են ուղիղ և անուղղակի (ոչ ուղիղ) տեսակների: Ապացույցը, որը հիմնված է ինչ-որ անտարակուսելի սկզբի վրա, որից անմիջականորեն արտածվում է թեզիսի ճշմարիտ լինելը, կոչվում է *ուղիղ ապացույց*: Ապացույցը կոչվում է *անուղղակի* (*ոչ ուղիղ*), եթե թեզիսի ճշմարիտ լինելը հիմնավորվում է թեզիսին հակադիր պնդման ճշմարտացիության հերքման միջոցով: Անուղղակի ապացուցման ամենատարածված տեսակը հակասող ենթադրության մեթոդն է, որը գիտամեթոդական գրականության մեջ անվանվում է նաև ապացուցում՝ անհեթեթության հանգեցմամբ:

Այս մեթոդի վերաբերյալ իր ուշագրավ և դիպուկ կարծիքն է հայտնել նաև անգլիացի հայտնի մաթեմատիկոս Գոդֆրի Հարոլդ Հարդին: *Ըստ Հարդիի՝ հակասող ենթադրության մեթոդը մաթեմատիկայի ամենանրբագեղ զենքերից մեկն է, այն անհամեմատ ավելի գեղեցիկ հնարք է, քան ցանկացած շախմատային գամբիտ, քանզի հաջողության հասնելու համար շախմատիստը կարող է զոհաբերել զինվոր կամ նույնիսկ ֆիգուր, մինչդեռ մաթեմատիկոսը դիմում է ողջ պարտիան պարտվելու ռիսկին*:

Սովորողը, ով առաջին անգամ ծանոթանում է հակասող ենթադրության մեթոդի էությանը, տարակուսանք է հայտնում առ այն, թե ի՞նչ տարբերություն, ես ապացուցելու եմ A պնդման ճշմարտացիությունը, թե վերջինիս ժխտման սխալ լինելը, միևնույնն է, եթե մեկը կարողանամ ապացուցել, ինքնաբերաբար մյուսն էլ կապացուցեմ և կարծես խիստ թերահավատորեն է մոտենում այս մեթոդի կիրառման արդյունավետությանը: Առաջին հայացքից այդպիսի հարցադրումը կարծես իր մեջ ճշմարտության թվացյալ հատիկ պարունակում է: Մինչդեռ տարբեր տիպային և ոչ տիպային խնդիրների քննարկման շնորհիվ է, որ աշակերտը կարողանում է լիարժեք ընկալել այս մեթոդի էությունը, արդյունավետ կիրառման հնարավորություններն ու սահմանները:

Հարկ է նշել, որ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում հանդիպում են ապացուցման և/կամ հերքման վերաբերյալ տարբեր խնդիրներ, որոնց լուծման ժամանակ հակասող ենթադրության մեթոդի կիրառման արդյունքում դժվար է անմիջականորեն հանգել հակասության, դեռ ավելին, ի սկզբանե ամենևին պարզ չէ, թե ինչի «շնորհիվ» կարող ենք հանգել հակասության:

<u>Ըստ էության պետք է փաստենք, որ որպես կանոն հակասության հանգելու համար շատ դեպքերում հակասող ենթադրության մեթոդին «զուգահեռ» անհրաժեշտ է կիրառել մեկ այլ սկզբունք, մեթոդ, կանոն և/կամ հնարք ևս: Որպես այդպիսիք կարող են հանդես</u>

գալ, մասնավորապես, Դիրիխլեի սկզբունքը (երբ ճագարներին տեղավորում ենք վանդակներում), ինվարիանտի կիրառման մեթոդը (երբ տվյալ խնդրի պայմաններում որևէ մեծություն կամ մեծության որևէ հատկություն մնում է անփոփոխ), ներկումը (երբ տրված ելակետային տիրույթը որոշակի սկզբունքով ներկում ենք մի քանի գույներով), եզրայինի կանոնը (երբ տվյալ խնդրի պայմաններում քննարկման ենթակա օբյեկտներից դիտարկում ենք ամենաէքստրեմալ հատկությամբ օժտված օբյեկտը) և այլն:

Անհրաժեշտ է հստակ ընդգծել, որ շատ դեպքերում հակասող ենթադրության մեթոդի և հավելյալ որևէ սկզբունքի, հնարքի, կանոնի և/կամ մեթոդի համատեղ կիրառման արդյունքում է միայն հնարավոր լինում կիրարկել հակասող ենթադրության մեթոդի գործիքակազմը և հասնել առաջադրված խնդրի լուծմանը:

Գործնակում յուրաքանչյուր կոնկրետ խնդրում (երբ պահանջվում է ապացուցել ինչ-որ A պնդման ճշմարտացիություն) ի սկզբանե ամենևին պարզ չէ, նրանում կիրառելի՞ է արդյոք հակասող ենթադրության մեթոդը, թե՞ ոչ և բացի այդ, այս մեթոդի կիրառման ցանկության դեպքում անգամ, հիմնական դժվարությունը կայանում է հենց տրամաբանական դատողությունների միջոցով $\overline{A}$ պնդման կեղծ լինելն ապացուցելը, ինչի համար ֆորմալ առումով հակասող ենթադրության մեթոդին ծանոթանալուց զատ անհրաժեշտ է տրամաբանական խնդիրների լուծման որոշակի հմտություն, կարողություն և փորձառություն:

Ստորև կանդրադառնանք մի քանի հավելյալ սկզբունքի և/կամ մեթոդի և/կամ կանոնի, որոնք ապահովում են ապացուցման և/կամ հերքման տարբեր խնդիրներում հակասող ենթադրության մեթոդի արդյունավետ կիրարկումը:

Դիրիխլեի սկզբունքը:

Սովորաբար մաթեմատիկական գրականությունում գերմանացի հայտնի մաթեմատիկոս Պետեր Գուստավ Լեժեն **Դիրիխլեի** (1805-1859) **սկզբունքը տրվում է ճագարների և վանդակների օրինակով, այն է. եթե** $\boldsymbol{n}$ **հատ վանդակներում գտնվում են** N **թվով ճագարներ, ընդ որում** $N > \boldsymbol{n}$ **, ապա կգտնվի այնպիսի վանդակ, որում կլինեն մեկից ավել ճագարներ**:

Հարկ ենք համարում հատուկ նշել, որ Դիրիխլեի սկզբունքի համաձայն ոչ թե որոշում ենք այն վանդակը, որում կան մեկից ավել ճագարներ (և ոչ էլ որոշում ենք այն մեկից ավել ճագարներին, որոնք գտնվում են միևնույն վանդակում), այլ միայն **հիմնավորում ենք այդպիսի վանդակի առկայությունը (գոյությունը)**:

Տարբեր խնդիրներում կիրառվում է նաև **Դիրիխլեի ընդհանրացված սկզբունքը**, համաձայն որի, **եթե** $\boldsymbol{n}$ **հատ վանդակներում գտնվում են** N **թվով ճագարներ, ընդ որում** $N > \boldsymbol{kn}$ **, ապա կգտնվի այնպիսի վանդակ, որում կլինեն առնվազն** $\boldsymbol{k+1}$ **ճագարներ**:

Այս պարագայում ևս մենք ոչ որոշում ենք այն վանդակը, որտեղ կլինեն առնվազն $k+1$ ճագարներ, ոչ էլ որոշում ենք այն առնվազն $k+1$ ճագարներին, որոնք գտնվում են մեկ վանդակում, այլ միայն **հիմնավորում ենք այդպիսի վանդակի առկայությունը (գոյությունը)**:

Այժմ դիտարկենք խնդիրներ (օրինակներ), որոնք կլուծենք հակասող ենթադրության և Դիրիխլեի սկզբունքի անմիջական կիրառման միջոցով:

Օրինակ 1: Ապացուցել, որ $7x7$ չափերի քառակուսային աղյուսակի վանդակներում հնարավոր չէ տեղադրել -1; 0 և 1 թվերն այնպես, որ բոլոր տողերի, սյուների և անկյունագծերի վրա դասավորված թվերի գումարները լինեն միմյանցից տարբեր:

Լուծում: Կատարենք խնդրում ապացուցման ենթակա պնդմանը հակասող ենթադրություն. դիցուք՝ $7x7$ չափերի քառակուսային աղյուսակի վանդակներում հնարավոր է տեղադրել -1; 0 և 1 թվերն այնպես, որ բոլոր տողերի, սյուների և անկյունագծերի վրա դասավորված թվերի գումարները լինեն միմյանցից տարբեր:

Ունենք 7 տող, 7 սյուն և 2 անկյունագիծ և, ուրեմն, հնարավոր գումարների քանակը 16 է: Այս հնարավոր գումարները դիտարկենք որպես «ճագարներ»: Ըստ խնդրի պայմանի՝ յուրաքանչյուր տողում, սյունում կամ անկյունագծի վրա պետք է դասավորված լինեն յոթ թվեր, որոնցից յուրաքանչյուրը կարող է լինել -1; 0 կամ 1 , հետևաբար որևէ տողում, սյունում կամ անկյունագծի վրա դասավորված թվերի գումարը կարող է լինել $-7;\ -6;\ -5;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6$ կամ 7 :

Ըստ այդմ, յուրաքանչյուր տողի, սյան կամ անկյունագծի վրա դասավորված թվերի գումարի այս հնարավոր տարբերակներն էլ դիտարկենք որպես «վանդակներ»: Պայմանավորվենք յուրաքանչյուր «ճագար»-գումար տեղադրել թվապես իրեն հավասար «վանդակում»:

Ունենք $n=15$ «վանդակներ» և $N=16$ «ճագարներ», հետևաբար, Դիրիխլեի սկզբունքի համաձայն, կգտնվի այնպիսի «վանդակ», որում կլինեն առնվազն երկու «ճագարներ», այսինքն առնվազն երկու գումար միմյանց հավասար են: Կնշանակի՝ մեր ենթադրությունը կեղծ է, հետևաբար խնդրի պնդումն ապացուցված է:

Ինչպես տեսնում ենք, ըստ էության ելակետային A պնդման ճշմարտացիությունն ապացուցելու փոխարեն ապացուցեցինք, որ նրա ժխտումը՝ $\overline{A}$-ը, կեղծ է, ընդ որում, վերջինիս կեղծ լինելն էլ հիմնավորեցինք Դիրիխլեի սկզբունքի անմիջական կիրառմամբ:

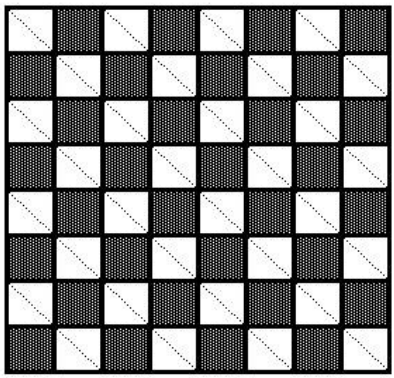
Հավելենք, որ օրինակ 1-ի լուծման առաջարկվող մոտեցումը հնարավորություն է տալիս կատարել ընդհանրացում և համանման դատողություններով, հակասող ենթադրության մեթոդի և Դիրիխլեի սկզբունքի համատեղ, անմիջական կիրառմամբ ապացուցել, որ ցանկացած k բնական թվի պարագայում kxk չափերի քառակուսային աղյուսակի վանդակներում հնարավոր չէ տեղադրել -1; 0 և 1 թվերն այնպես, որ բոլոր տողերի, սյուների և անկյունագծերի վրա դասավորված թվերի գումարները լինեն միմյանցից տարբեր: Իրոք, համանման դատողությունների արդյունքում կունենանք $n=2k+1$

հատ «վանդակներ» և $N = 2k + 2$ հատ «ճագարներ», հետևաբար, Դիրիխլեի սկզբունքի համաձայն, կգտնվի այնպիսի «վանդակ», որում կլինեն առնվազն երկու «ճագարներ», այսինքն՝ -1; 0 և 1 թվերի ցանկացած դասավորության դեպքում առնվազն երկու գումար (դասավորված տողերի, սյուների կամ անկյունագծերի վրա) միմյանց հավասար են:

Օրինակ 2: Ապացուցել, որ հնարավոր չէ շախմատային տախտակի սպիտակ վանդակների վրա տեղադրել թվով 8 սպիտակ փղեր այնպես, որ ոչ մի երկուսը միմյանց չհարվածեն:

Լուծում: Կատարենք խնդրում ապացուցման ենթակա պնդմանը հակասող ենթադրություն. դիցուք՝ հնարավոր է շախմատային տախտակի սպիտակ վանդակների վրա տեղադրել թվով 8 սպիտակ փղեր այնպես, որ ոչ մի երկուսը միմյանց չհարվածեն:

Շախմատային տախտակի թվով 7 խումբ անկյունագծային սպիտակ վանդակների շարքերը, ինչպես ցույց է տրված նկար 1-ում, դիտարկենք որպես «վանդակներ», իսկ տրված 8 փղերը՝ որպես «ճագարներ»: Պայմանավորվենք յուրաքանչյուր «ճագար»-փիղ տեղադրել այն «վանդակ»-խմբում-



Նկ. 1

շարքում, որի անկյունագծային սպիտակ որևէ վանդակում որ գտնվում է այդ փիղը:

Ունենք $n = 7$ «վանդակներ» և $N = 8$ «ճագարներ», հետևաբար, Դիրիխլեի սկզբունքի համաձայն, կգտնվի այնպիսի «վանդակ», որում կլինեն առնվազն երկու «ճագարներ», այսինքն՝ առնվազն երկու փիղ գտնվում են նկար 1-ում պատկերված որևէ անկյունագծային սպիտակ վանդակների միևնույն շարքի վրա և, բնականաբար, հարվածում են միմյանց: Կնշանակի՝ մեր ենթադրությունը կեղծ է, հետևաբար խնդրի պնդումն ապացուցված է:

Հավելենք, որ օրինակ 2-ի լուծման առաջարկվող մոտեցումը հնարավորություն է տալիս կատարել ընդհանրացում և համանման դատողություններով, հակասող ենթադրության մեթոդի և Դիրիխլեի սկզբունքի համատեղ, անմիջական կիրառմամբ ապացուցել, որ ցանկացած k բնական թվի պարագայում շախմատաձև ներկված $2kx2k$ չափերի քառակուսային տախտակի սպիտակ վանդակների վրա հնարավոր չէ տեղադրել թվով $2k$ սպիտակ փղեր այնպես, որ ոչ մի երկուսը միմյանց չհարվածեն:

Դիտարկենք ևս երկու օրինակ, որոնց լուծման ընթացքում կօգտվենք հակասող ենթադրության մեթոդից և Դիրիխլեի ընդհանրացված սկզբունքից:

Օրինակ 3: Ապացուցել, որ 82 հատ խորանարդիկներն ինչպես էլ ներկենք տարբեր գույներով, միշտ կգտնվեն այնպիսի 10 խորանարդիկներ, որոնք կամ բոլորը միևնույն գույնի են, կամ բոլորը տարբեր գույների են:

Լուծում: Կատարենք խնդրում ապացուցման ենթակա պնդմանը հակառող ենթադրություն. դիցուք՝ հնարավոր է 82 հատ խորանարդիկները ներկել տարբեր գույներով այնպես, որ նրանց մեջ չգտնվեն 10 խորանարդիկներ միևնույն գույնի և/կամ 10 խորանարդիկներ տարբեր գույների: Քանի որ, համաձայն մեր ենթադրության, տարբեր գույներով ներկված 82 հատ խորանարդիկների մեջ չկան 10 խորանարդիկներ տարբեր գույների, կնշանակի՝ խորանարդիկները (առավելագույնը) 9 տարբեր գույների են: Յուրաքանչյուր գույն դիտարկենք որպես «վանդակ», իսկ տրված 82 հատ խորանարդիկները՝ որպես «ճագարներ»:

Պայմանավորվենք յուրաքանչյուր «ճագար»-խորանարդիկ տեղադրել իր գույնին համապատասխանող «վանդակում»: Այսպիսով՝ ունենք $n \le 9$ «վանդակներ» և $N = 82 > 9 \cdot 9 \quad (k = 9)$ «ճագարներ», հետևաբար, Դիրիխլեի ընդհանրացված սկզբունքի համաձայն, կգտնվի այնպիսի «վանդակ», որում կլինեն առնվազն $k + 1 = 9 + 1 = 10$ «ճագարներ»-խորանարդիկներ, որոնք, բնականաբար, միևնույն գույնի են (քանի որ գտնվում են նույն «վանդակում»): Կնշանակի մեր ենթադրությունը կեղծ է, հետևաբար, համաձայն հակասող ենթադրության մեթոդի՝ խնդրի պնդումն ապացուցված է:

Օրինակ 4: Ապացուցել, որ կամայական $m(m+1)+1$ հատ բնական թվերից միշտ կարելի է ընտրել այնպիսի $(m+1)$ հատ թվեր, որոնց գումարը բաժանվում է $(m+1)$-ի:

Լուծում: Կատարենք խնդրում ապացուցման ենթակա պնդմանը հակասող ենթադրություն. դիցուք՝ կամայական $m(m+1)+1$ հատ բնական թվերից հնարավոր չէ ընտրել այնպիսի $(m+1)$ հատ թվեր, որոնց գումարը բաժանվում է $(m+1)$-ի:

Ինչպես գիտենք, կամայական բնական թիվ $(m+1)$-ի վրա բաժանելիս մնացորդում կարող է ստացվել $0;\ 1;\ 2;\ \cdots;\ m$: Այս հնարավոր մնացորդները դիտարկելով որպես «վանդակներ», իսկ տրված բնական թվերը՝ որպես «ճագարներ» և յուրաքանչյուր «ճագար»-թիվ տեղադրելով այն համարի «վանդակում», որը թվապես հավասար է տվյալ թիվը $(m+1)$-ի վրա բաժանելիս առաջացած մնացորդին՝ կունենանք $n=m+1$ «վանդակներ» և $N=m(m+1)+1>m(m+1)=kn \quad (k=m)$ «ճագարներ», հետևաբար, Դիրիխլեի ընդհանրացված սկզբունքի համաձայն, կգտնվի այնպիսի «վանդակ», որում կլինեն առնվազն $k+1=m+1$ «ճագարներ»-թվեր, որոնք $(m+1)$-ի վրա բաժանելիս տալիս են միևնույն մնացորդը, հետևաբար հենց այդ $k+1=m+1$ «ճագարների»-թվերի գումարն էլ կբաժանվի $(m+1)$-ի: Կնշանակի՝ մեր ենթադրությունը կեղծ է, հետևաբար, համաձայն հակասող ենթադրության մեթոդի, խնդրի պնդումն ապացուցված է:

Ինչպես տեսնում ենք, ապացուցման կամ հերքման համեմատաբար պարզ խնդիրներում, «հարմար» ձևով ընտրելով «ճագարներ» և «վանդակներ», ինչպես նաև «ճագարները» «վանդակներում» տեղադրելու համապատասխան «մեխանիզմներ», հակասող ենթադրության մեթոդի և Դիրիխլեի սկզբունքի (և/կամ Դիրիխլեի ընդհանրացված սկզբունքի) անմիջական կիրառման շնորհիվ հանգում ենք խնդրի պնդման ապացուցմանը:

Սակայն շատ դեպքերում՝ ապացուցման և/կամ հերքման համեմատաբար ոչ պարզ խնդիրներում, ի սկզբանե հնարավոր չէ խնդրի ելակետային տվյալներից ելնելով միանգամից ընտրել կոնկրետ «ճագարներ» ու «վանդակներ», այլ պետք է նախապես կատարել որոշակի դատողություններ և/կամ ձևափոխություններ, որից հետո միայն փորձել կիրառել Դիրիխլեի սկզբունքը:

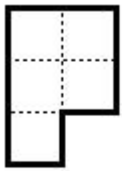
Օրինակ 5: Անվերջ քառակուսային ցանցի հանգույցներից (գագաթներից) ընտրված են կամայական 5-ը: Ապացուցել, որ այս գագաթները միմյանց միացնող հատվածներից առնվազն մեկն անցնում է ցանցի մեկ այլ գագաթով:

Լուծում: Կատարենք խնդրում ապացուցման ենթակա պնդմանը հակասող ենթադրություն. դիցուք՝ գագաթները միմյանց միացնող հատվածներից և ոչ մեկը չի անցնում ցանցի մեկ այլ գագաթով:

Տրված անվերջ քառակուսային ցանցն ընդգրկող հարթության վրա ներմուծենք ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգ: Ցանցի գագաթներից որևէ մեկն ընտրենք որպես կոորդինատների սկզբնակետ: Կոորդինատային առանցքներն ուղղենք ցանցի գծերի երկայնքով, իսկ միավոր հատվածը վերցնենք հավասար ցանցի քառակուսու կողմին: Ակնհայտ է, որ այդպիսի կոորդինատային համակարգում ամբողջ թվերի ցանկացած կարգավորված թվազույգին (որպես ինչ-որ կետի կոորդինատ) կհամապատասխանի ցանցի որևէ գագաթ, իսկ ցանցի բոլոր գագաթների կոորդինատները կլինեն ամբողջ թվեր, որոնց զույգության համար հնարավոր են հետևյալ տարբերակները՝ (զույգ, զույգ), (կենտ, կենտ), (զույգ, կենտ) կամ (կենտ, զույգ): Այս չորս հնարավոր տարբերակները դիտարկենք որպես «վանդակներ», իսկ ցանցի ընտրված կամայական 5 գագաթները դիտարկենք որպես «ճագարներ»: Պայմանավորվենք յուրաքանչյուր «ճագար»-գագաթ տեղադրել այն «վանդակում», որը համընկնում է տվյալ գագաթի կոորդինատների զույգությանը: Այսպիսով՝ ունենք $n=4$ «վանդակներ» և $N=5$ «ճագարներ»: Ակնհայտ է, որ $5=N>n=4$, հետևաբար, Դիրիխլեի սկզբունքի համաձայն, կգտնվի այնպիսի «վանդակ», որում կլինեն առնվազն երկու «ճագարներ», այսինքն՝ առնվազն երկու գագաթների համապատասխան կոորդինատներն ունեն միևնույն զույգությունը: Հեշտ է նկատել, որ այս պարագայում այդ երկու գագաթները միացնող հատվածի միջնակետը ևս կունենա ամբողջ կոորդինատներ (քանի որ հատվածի միջնակետի յուրաքանչյուր կոորդինատ հավասար է հատվածի ծայրակետերի համապատասխան կոորդինատների կիսագումարին և եթե հատվածի ծայրակետերի համապատասխան կոորդինատներն ունեն միևնույն զույգությունը, ապա վերջիններիս կիսագումարը կլինի ամբողջ թիվ) և, ուրեմն, կհանդիսանա ցանցի գագաթ, հետևաբար մեր ենթադրությունը կեղծ է և, ուրեմն, համաձայն հակասող ենթադրության մեթոդի, խնդրի պնդումն ապացուցված է:

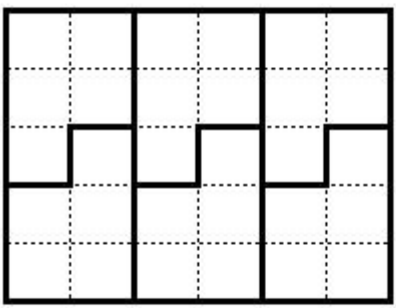
Օրինակ 6: $5x6$ չափերի ուղղանկյուն ցանցի կամայական 19 վանդակ ներկել են որևէ գույնով: Ապացուցել, որ միշտ կարելի է գտնել $2x2$ չափերի քառակուսի, որում առնվազն 3 վանդակ ներկված են:

Լուծում: Կատարենք խնդրում ապացուցման ենթակա պնդմանը հակասող ենթադրություն. դիցուք՝ հնարավոր չէ գտնել $2x2$ չափերի քառակուսի, որում առնվազն 3 վանդակ ներկված են:



Նկ. 2

Մինչ առաջադրված կոնկրետ խնդրին անդրադառնալը, նախապես նկատենք, որ համաձայն Դիրիխլեի սկզբունքի՝ նկար 2-ում պատկերված տիրույթում ինչպիսի չորս վանդակ էլ որ ներկված լինի, նրանում գտնվող $2x2$ չափերի քառակուսու առնվազն երեք վանդակ կլինեն ներկված:



Նկ. 3

Տրված $5x6$ չափերի ուղղանկյունը բաժանենք 6 մասերի (տիրույթների) այնպես, ինչպես ցույց է տրված նկար 3-ում և վերջիններս դիտարկենք որպես «վանդակներ», իսկ ներկված կամայական 19 վանդակները դիտարկենք որպես «ճագարներ»:

Այսպիսով՝ ունենք $n=6$ «վանդակներ» և $N=19>3\cdot 6 \quad (k=3)$ «ճագարներ», հետևաբար, Դիրիխլեի ընդհանրացված սկզբունքի համաձայն, կգտնվի այնպիսի «վանդակ»-տիրույթ, որում կլինեն առնվազն $k+1=3+1=4$ «ճագարներ»-ներկված վանդակներ: Ակնհայտ է, որ հենց այդ տիրույթի 2*x*2 չափսերի քառակուսում էլ կգտնվեն առնվազն 3 ներկված վանդակ: Փաստորեն մեր ենթադրությունը կեղծ է և, ըստ այդմ, համաձայն հակասող ենթադրության մեթոդի, Դիրիխլեի և Դիրիխլեի ընդհանրացված սկզբունքների, խնդրի պնդումն ապացուցված է: Հարկ ենք համարում ընդգծել, որ դիտարկված օրինակում կիրառվեց և՛ Դիրիխլեի սկզբունքը, և՛ Դիրիխլեի ընդհանրացված սկզբունքը:

Օրինակ 7: Դասարանը բաղկացած է 25 աշակերտից: Հայտնի է, որ աշակերտների ցանկացած եռյակում առնվազն երկուսն ընկերություն են անում: Ապացուցել, որ կգտնվի այնպիսի աշակերտ, ով դասարանում ունի առնվազն 12 ընկերներ:

Լուծում: Նկատենք, որ եթե դասարանում բոլորը բոլորի հետ ընկերություն են անում, ապա յուրաքանչյուր աշակերտ կունենա 24-ական ընկեր, ըստ այդմ, խնդրի պահանջը բավարարված կլինի, իսկ եթե դասարանում բոլորը բոլորի հետ ընկերություն չեն անում, կատարենք խնդրում ապացուցման ենթակա պնդմանը հակասող ենթադրություն. դիցուք հնարավոր չէ գտնել այնպիսի աշակերտ, ով դասարանում ունի առնվազն 12 ընկերներ:

Այսպիսով, եթե դասարանում բոլորը բոլորի հետ ընկերություն չեն անում, կնշանակի՝ կան առնվազն երկու աշակերտներ, որոնք միմյանց հետ ընկերություն չեն անում: Այդպիսիններից որևէ երկուսին պայմանականորեն անվանենք աշակերտ-1 և աշակերտ-2 և վերջիններս դիտարկենք որպես «վանդակներ»: Ակնհայտ է, որ մյուս 23 աշակերտներից յուրաքանչյուրն ընկերություն է անում աշակերտ-1-ից և աշակերտ-2-ից առնվազն մեկի հետ, քանի որ, ըստ խնդրի պայմանի, աշակերտների ցանկացած եռյակում առնվազն երկուսն ընկերություն են անում: Ըստ այդմ, մյուս 23 աշակերտներին դիտարկենք որպես «ճագարներ» և պայմանավորվենք յուրաքանչյուր «ճագար»-աշակերտի տեղադրել աշակերտ-1-ին համապատասխանող 1-ին «վանդակում», եթե նա ընկերություն է անում աշակերտ-1-ի հետ, բայց ընկերություն չի անում աշակերտ-2-ի հետ, մնացած բոլոր դեպքերում (երբ նա ընկերություն է անում աշակերտ-2-ի հետ, բայց ընկերություն չի անում աշակերտ-1-ի կամ երբ նա ընկերություն է անում և՛ աշակերտ-1-ի հետ, և՛ աշակերտ-2-ի հետ) նրան կտեղադրենք աշակերտ-2-ին համապատասխանող 2-րդ «վանդակում»: Այսպիսով՝ ունենք $n=2$ «վանդակներ» և $N=23>11\cdot 2\ \ (k=11)$ «ճագարներ», հետևաբար, Դիրիխլեի ընդհանրացված սկզբունքի համաձայն, կգտնվի այնպիսի «վանդակ», որում կլինեն առնվազն $k+1=11+1=12$ «ճագարներ»-աշակերտներ: Եվ, ուրեմն, հենց այդ «վանդակին» համապատասխանող աշակերտն էլ (աշակերտ-1-ը կամ աշակերտ-2-ը) կունենա առնվազն 12 ընկերներ (նրանք այն «ճագար»-աշակերտներն են, որոնք գտնվում են վերջինիս համապատասխանող «վանդակում»): Փաստորեն մեր ենթադրությունը կեղծ է և, ըստ այդմ, համաձայն հակասող ենթադրության մեթոդի և Դիրիխլեի ընդհանրացված սկզբունքի, խնդրի պնդումն ապացուցված է:

<u>Դիրիխլեի սկզբունքին համանման պնդումներ պակասորդով:</u>

Նշենք, որ Դիրիխլեի սկզբունքը (կամ Դիրիխլեի ընդհանրացված սկզբունքը) պնդում է հավելորդով, երբ ճագարներն ավելին են, քան վանդակները:

Ընդհանրացնելով, համանման պնդումներ կարելի է ձևակերպել նաև պակասորդով, երբ ճագարների քանակը պակաս է վանդակների քանակից:

Ստորև կձևակերպենք և կապացուցենք Դիրիխլեի սկզբունքին (կամ սկզբունքի տրամաբանությանը) համանման մի քանի պնդումներ, որոնք հաջորդիվ անմիջականորեն կկիրառենք տարբեր խնդիրներ լուծելիս:

Նախ ձևակերպենք և ապացուցենք Դիրիխլեի սկզբունքին համանման պնդում պակասորդով:

Պնդում 1: Եթե n հատ վանդակներում գտնվում են N թվով ճագարներ, ընդ որում $N < n$, ապա կգտնվի այնպիսի վանդակ, որում ճագարներ չեն լինի:

Ապացույց: Պնդումը հեշտությամբ կարելի է ապացուցել հակասող ենթադրության մեթոդի անմիջական կիրառմամբ: Իրոք, կատարենք հակասող ենթադրություն, այն է. դիցուք՝ հնարավոր է n հատ վանդակներում տեղադրել N թվով ճագարներ այնպես, որ ոչ մի վանդակ դատարկ չմնա և $N < n$: Այս դեպքում ակնհայտ է, որ յուրաքանչյուր վանդակում կլինի առնվազն 1 ճագար, հետևաբար n հատ վանդակներում կլինեն առնվազն n հատ ճագարներ, կնշանակի՝ ճագարների N քանակի համար կունենանք՝ $N \geq n$, ինչը հակասում է $N < n$ պայմանին: Փաստորեն մեր ենթադրությունը կեղծ է և, ըստ այդմ, համաձայն հակասող ենթադրության մեթոդի, պնդումն ապացուցված է:

Այժմ ձևակերպենք և ապացուցենք Դիրիխլեի ընդհանրացված սկզբունքին համանման ընդհանրացված պնդում պակասորդով:

Պնդում 2: Եթե n հատ վանդակներում գտնվում են N թվով ճագարներ, ընդ որում $N < kn$, ապա կգտնվի այնպիսի վանդակ, որում կլինեն առավելագույնը $k-1$ ճագարներ:

Ապացույց: Պնդումն ապացուցենք հակասող ենթադրության մեթոդի անմիջական կիրառմամբ: Կատարենք հակասող ենթադրություն, այն է. դիցուք՝ հնարավոր է n հատ վանդակներում տեղադրել $N < kn$ թվով ճագարներ այնպես, որ յուրաքանչյուր վանդակում լինի $(k-1)$-ից ավել թվով ճագարներ: Եթե յուրաքանչյուր վանդակում կա $(k-1)$-ից ավել ճագար, կնշանակի՝ ամեն մի վանդակում կա առնվազն k հատ ճագար, հետևաբար n հատ վանդակներում կլինեն առնվազն kn հատ ճագարներ, հետևաբար ճագարների N քանակի համար կունենանք՝ $N \geq kn$, ինչը հակասում է $N < kn$ պայմանին: Փաստորեն մեր ենթադրությունը կեղծ է և, ըստ այդմ, համաձայն հակասող ենթադրության մեթոդի, պնդումն ապացուցված է:

Այժմ ձևակերպենք և ապացուցենք Դիրիխլեի սկզբունքի տրամաբանությանը համանման պնդում պակասորդով:

Պնդում 3: Եթե n հատ վանդակներում գտնվում են N թվով ճագարներ, ընդ որում $N < \frac{n(n-1)}{2}$, ապա կգտնվեն այնպիսի երկու վանդակներ, որոնցում կլինեն միննույն թվով ճագարներ (չբացառելով դատարկ վանդակի առկայությունը):

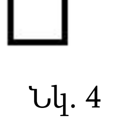
Ապացույց: Պնդումը հեշտությամբ կարելի է ապացուցել հակասող ենթադրության մեթոդի անմիջական կիրառմամբ: Իրոք, կատարենք հակասող ենթադրություն, այն է. դիցուք՝ հնարավոր է n հատ վանդակներում տեղադրել $N < \frac{n(n-1)}{2}$ թվով ճագարներ այնպես, որ ոչ մի երկու վանդակում չլինեն միննույն թվով ճագարներ: n հատ վանդակներում ճագարների քանակները դասավորենք աճման կարգով և ըստ այդմ i-րդ վանդակում եղած ճագարների քանակը նշանակենք a_i-ով: Պարզ է, որ $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$: Հեշտ է նկատել, որ

$a_1 \geq 0;\ a_2 \geq 1;\ \cdots;\ a_i \geq i-1;\ \cdots;\ a_n \geq n-1$, հետևաբար կունենանք՝ $N = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq 0 + 1 + \cdots + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$, ինչը հակասում է $N < \dfrac{n(n-1)}{2}$ ելակետային պայմանին: Փաստորեն մեր ենթադրությունը կեղծ է և, ըստ այդմ, համաձայն հակասող ենթադրության մեթոդի, պնդումն ապացուցված է:

Այժմ դիտարկենք օրինակ-խնդիրներ, որոնք կլուծենք հակասող ենթադրության մեթոդի և վերոգրյալ պնդումների անմիջական կիրառմամբ: Մինչ այդ նկատենք, որ օրինակ 1-ը կարելի էր լուծել նաև հակասող ենթադրության մեթոդի և պնդում 1-ի կիրառմամբ: Դրա համար բավական էր նախապես կատարել խնդրում ապացուցման ենթակա պնդմանը հակասող ենթադրություն, որից հետո պետք էր ուղղակի վերը նշած լուծման մեջ տեղերով փոխել «ճագարներին» և «վանդակներին»: Արդյունքում, պնդում 1-ի համաձայն, առաջացած դատարկ «վանդակի» առկայությունն էլ կփաստեր խնդրի պնդման ճշմարտացիությունը:

Դիտարկենք ևս երեք օրինակ:

Օրինակ 8: 8x8 չափսերի շախմատային տախտակի վրա տեղադրված են 31 հատ «զինվորներ»: Ապացուցել, որ կգտնվի նկար 4-ում պատկերված «Г»-աձև տիրույթ, որում «զինվորներ» չեն լինի:



Նկ. 4

Լուծում: Կատարենք խնդրում ապացուցման ենթակա պնդմանը հակասող ենթադրություն. դիցուք՝ հնարավոր չէ գտնել «Г»-աձև տիրույթ, որում «զինվորներ» չեն լինի։

Տեղադրված 31 հատ «զինվորները» դիտարկենք որպես «ճագարներ»։ Տրված 8x8 չափսերի շախմատային տախտակը բաժանենք 16 հատ 2x2 չափսերի քառակուսային տիրույթների և վերջիններս համարենք որպես «վանդակներ»։

Այսպիսով՝ ունենք $n=16$ «վանդակներ», որոնցում գտնվում են $N=31<2\cdot 16$ $(k=2)$ «ճագարներ», հետևաբար, պնդում 2-ի համաձայն, կգտնվի այնպիսի «վանդակ» - 2x2 չափսերի քառակուսային տիրույթ, որում կլինի առավելագույնը $k-1=2-1=1$ «ճագար» - «զինվոր»։ Եվ, ուրեմն, հենց այդ «վանդակում» էլ գոյություն կունենա նկար 4-ում պատկերված «Г»-աձև տիրույթ, որում «զինվորներ» չեն լինի։ Փաստորեն մեր ենթադրությունը կեղծ է և, ըստ այդմ, համաձայն հակասող ենթադրության մեթոդի և պնդում 2-ի, խնդրի պնդումն ապացուցված է։

Օրինակ 9։ 10x10 չափսերի քառակուսային ցանցի վանդակների մի մասը, 50-ից պակաս քանակով, ներկել են։ Ապացուցել, որ քառակուսային ցանցի վրա կգտնվեն երկու հարևան վանդակներ (ընդհանուր կողմ ունեցող), որոնք ներկված չեն։

Լուծում։ Կատարենք խնդրում ապացուցման ենթակա պնդմանը հակասող ենթադրություն. դիցուք՝ քառակուսային ցանցի վրա հնարավոր չէ գտնել երկու հարևան վանդակներ, որոնք ներկված չեն։

Պարզ է, որ 10x10 չափերի քառակուսային ցանցն ունի 10 սյուներ՝ յուրաքանչյուրը կազմված 10-ական վանդակներից: Այս 10 սյուները դիտարկենք որպես «վանդակներ», իսկ ցանցի ներկված (50-ից պակաս քանակով) վանդակները՝ «ճագարներ»: Այսպիսով՝ ունենք $n=10$ «վանդակներ», որոնցում գտնվում են $N \le 49 < 5 \cdot 10$ $\left(k=5\right)$ «ճագարներ», հետևաբար, պնդում 2-ի համաձայն, կգտնվի այնպիսի «վանդակ»-քառակուսային ցանցի սյուն, որում կլինի առավելագույնը $k-1=5-1=4$ «ճագար»-ներկված վանդակ: Փաստորեն հիմնավորեցինք, որ ելակետային 10x10 չափերի քառակուսային ցանցում գոյություն ունի այնպիսի սյուն (1x10 չափերի), որի մեջ ներկված են առավելագույնը 4 վանդակ:

Այժմ այս սյան վանդակները բաժանենք 5 հատ 1x2 չափերի տիրույթների և վերջիններս դիտարկենք որպես նոր «վանդակներ», իսկ այդ նույն սյան վրա գտնվող ներկված վանդակները դիտարկենք որպես նոր «ճագարներ»: Այսպիսով՝ ունենք $n=5$ «վանդակներ», որոնցում գտնվում են $N \le 4 < 5 = n$ «ճագարներ», հետևաբար, պնդում 1-ի համաձայն, կգտնվի այնպիսի «վանդակ» - 1x2 չափերի տիրույթ, որում «ճագարներ» - ներկված վանդակներ չեն լինի: Փաստորեն մեր ենթադրությունը կեղծ է և, ըստ այդմ, համաձայն հակասող ենթադրության մեթոդի, հենց այդ տիրույթն էլ իրենից կներկայացնի այն երկու հարևան վանդակները, որոնք ներկված չեն: Խնդրի պնդումն ապացուցված է:

Օրինակ 10: Ապացուցել, որ հնարավոր չէ թվով 4949 միատեսակ մետաղադրամները բաժանել 100 քսակներում այնպես, որ յուրաքանչյուր երկու քսակում լինեն տարբեր քանակի մետաղադրամներ (չբացառելով նաև դատարկ քսակի առկայությունը):

Լուծում: Կատարենք խնդրում ապացուցման ենթակա պնդմանը հակասող ենթադրություն. դիցուք՝ հնարավոր է թվով 4949 միատեսակ մետաղադրամները բաժանել 100 քսակներում այնպես, որ յուրաքանչյուր երկու քսակում լինեն տարբեր քանակի մետաղադրամներ (չբացառելով նաև դատարկ քսակի առկայությունը):

Ունենք $n=100$ «վանդակներ»-քսակներ և $N=4949<\dfrac{n(n-1)}{2}=4950$ «ճագարներ»-մետաղադրամներ, հետևաբար, համաձայն պնդում 3-ի, ուզած բաժանման դեպքում էլ կլինեն առնվազն երկու միևնույն քանակի մետաղադրամներ պարունակող քսակներ: Փաստորեն մեր ենթադրությունը կեղծ է և, ըստ այդմ, համաձայն հակասող ենթադրության մեթոդի և պնդում 3-ի, խնդրի պնդումն ապացուցված է:

Դիրիխլեի սկզբունքին համանման պնդումներ գումարելիների համար:

Ինչպես արդեն համոզվեցինք, Դիրիխլեի սկզբունքի կամ այդ սկզբունքից բխող տարբեր պնդումների էությունը կայանում է N թվով ճագարները n հատ վանդակներում տեղադրելիս տարբեր անխուսափելի իրավիճակների վեր հանմանը (երբ դատողություններ են արվում վերջնարդյունքում որևէ վանդակում կամ որևէ երկու վանդակներում ճագարների գոյության և/կամ քանակի հետ կապված):

Այժմ փորձենք մի փոքր ձևափոխել Դիրիխլեի սկզբունքի «գործիքակազմը»: Նկատենք, որ ըստ էության N թվով ճագարներ տեղադրել n հատ վանդակներում «գումարելիների» լեզվով ասած նշանակում է N գումարը «վերածել» n հատ ոչ բացասական ամբողջ գումարելիների: Ստորև, այս համատեքստում, ձևակերպենք և ապացուցենք պնդումներ, որոնք այնուհետև անմիջականորեն կկիրառենք ապացուցման կամ հերքման տարբեր խնդիրներում (ստորև բոլոր պնդումներում ենթադրվում է, որ դիտարկվող գումարների յուրաքանչյուր գումարելի ոչ բացասական է):

Պնդում 4: Ապացուցել, որ եթե $a_1+a_2+\cdots+a_n=N$, ապա կա՛մ բոլոր գումարելիներն իրար հավասար են՝ $a_1=a_2=\cdots=a_n=\dfrac{N}{n}$, կա՛մ այդ գումարի մեջ կգտնվեն այնպիսի երկու a_i և a_j գումարելիներ, որոնց համար տեղի ունեն՝ $a_i>\dfrac{N}{n}$; $a_j<\dfrac{N}{n}$:

Ապացույց: Ակնհայտ է, որ եթե $a_1+a_2+\cdots+a_n$ գումարում բոլոր գումարելիներն իրար հավասար են, ապա $a_1=a_2=\cdots=a_n=\dfrac{N}{n}$: Այժմ ենթադրենք $a_1+a_2+\cdots+a_n$ գումարում բոլոր գումարելիներն իրար հավասար չեն:

Այս դեպքում պնդումը հեշտությամբ կարելի է ապացուցել հակասող ենթադրության մեթոդի անմիջական կիրառմամբ: Իրոք, կատարենք հակասող ենթադրություն, այն է. դիցուք՝ $a_1+a_2+\cdots+a_n=N$ և այս գումարի մեջ գոյություն չունեն այնպիսի երկու a_i և a_j գումարելիներ, որոնց համար տեղի կունենան հետևյալ անհավասարությունները՝ $a_i>\dfrac{N}{n}$; $a_j<\dfrac{N}{n}$: Կնշանակի՝ այդ գումարում կգտնվեն ամենամեծ և ամենափոքր գումարելիներ, որոնք կնշանակենք, համապատասխանաբար, a_i -ով և a_j -ով: Արդյունքում կունենանք՝ $a_j\le a_1\le a_i$; $a_j\le a_2\le a_i$; $\cdots$; $a_j\le a_k\le a_i$; $\cdots$; $a_j=a_j\le a_i$; $\cdots$; $a_j\le a_i=a_i$; $\cdots$; $a_j\le a_n\le a_i$ (նկատենք, որ թվով n հատ կրկնակի անհավասարությունների մեջ կան մեկական խիստ անհավասարություններ, հակառակ պարագայում բոլոր a_1; a_2; $\cdots$; a_n գումարելիները կլինեին միմյանց հավասար): Գումարելով միմյանց այս նույնանուն կրկնակի անհավասարությունները և ի նկատի ունենալով, որ վերջիններիս մեջ կան մեկական խիստ անհավասարություններ և $a_1+a_2+\cdots+a_n=N$, կունենանք՝ $na_j<N<na_i$, որտեղից էլ անմիջականորեն կստանանք՝ $a_i>\dfrac{N}{n}$ և $a_j<\dfrac{N}{n}$: Ստացվեց հակասություն: Փաստորեն մեր ենթադրությունը կեղծ է և, ըստ այդմ, համաձայն հակասող ենթադրության մեթոդի, պնդումն ապացուցված է:

Պնդում 5: Ապացուցել, որ եթե $a_1+a_2+\cdots+a_n\ge N$

$\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\leq N\right)$, ապա $a_1+a_2+\cdots+a_n$ գումարում կգտնվի a_i գումարելի այնպիսին, որ $a_i\geq\frac{N}{n}$ ($a_i\leq\frac{N}{n}$):

Ապացույց: Պնդումը հեշտությամբ կարելի է ապացուցել հակասող ենթադրության մեթոդի անմիջական կիրառմամբ: Իրոք, կատարենք հակասող ենթադրություն, այն է. դիցուք՝ $a_1+a_2+\cdots+a_n\geq N$ և $a_1+a_2+\cdots+a_n$ գումարում ոչ մի a_k $\left(k=\overline{1;n}\right)$ գումարելու համար տեղի չունի $a_k\geq\frac{N}{n}$ անհավասարությունը: Այդ դեպքում ակնհայտ է, որ յուրաքանչյուր a_k գումարելու համար տեղի կունենա $a_k<\frac{N}{n}$ $\left(k=\overline{1;n}\right)$ անհավասարությունը, հետևաբար կունենանք՝ $a_1+a_2+\cdots+a_n<n\cdot\frac{N}{n}=N$, ինչը հակասում է $a_1+a_2+\cdots+a_n\geq N$ պայմանին: Ստացվեց հակասություն: Փաստորեն մեր ենթադրությունը կեղծ է և, ըստ այդմ, համաձայն հակասող ենթադրության մեթոդի, պնդումն ապացուցված է:

Պնդում 6: Ապացուցել, որ եթե $a_1+a_2+\cdots+a_n\geq N$ $\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\leq N\right)$, ապա ցանկացած $k\leq n$ բնական թվի համար $a_1+a_2+\cdots+a_n$ գումարում կգտնվեն $a_{i_1};\ a_{i_2};\ \cdots;\ a_{i_k}$ $\left(1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n\right)$ գումարելիներ այնպիսին, որ $a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_k}\geq k\cdot\frac{N}{n}$ $\left(a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_k}\leq k\cdot\frac{N}{n}\right)$:

Ապացույց: Պնդումը հեշտությամբ կարելի է ապացուցել հակասող ենթադրության մեթոդի անմիջական կիրառմամբ: Իրոք, կատարենք հակասող ենթադրություն, այն է. դիցուք՝ ցանկացած $k \le n$ բնական թվի համար $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ գումարում չեն գտնվի $a_{i_1};\ a_{i_2};\ \cdots;\ a_{i_k}$ $\left(1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n\right)$ գումարելիներ այնպիսին, որ $a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_k} \ge k \cdot \dfrac{N}{n}$

Դիտարկենք հետևյալ գումարները՝ $b_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$; $b_2 = a_2 + a_3 + \cdots + a_{k+1}$; $\cdots$; $b_{n-1} = a_{n-1} + a_n + a_1 + \cdots + a_{k-2}$; $b_n = a_n + a_1 + \cdots + a_{k-1}$: Նկատենք, որ $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = k\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right) \ge kN$, հետևաբար, պնդում 5-ի համաձայն, $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ գումարում կգտնվի b_i գումարելի այնպիսին, որ $b_i \ge \dfrac{N}{n} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_k} \ge k \cdot \dfrac{N}{n}$, որտեղ $i_1 = i$ և սկսած i_2 -ից՝ $i_k = i_{k-1} + 1$, եթե $i_{k-1} + 1 \le n$ և $i_k = 1$, եթե $i_{k-1} + 1 > n$, ինչը հակասում է մեր ենթադրությանը: Փաստորեն մեր ենթադրությունը կեղծ է և, ըստ այդմ, համաձայն հակասող ենթադրության մեթոդի, պնդումն ապացուցված է:

Պնդում 7: Ապացուցել, որ եթե $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = N$, ապա կա՛մ բոլոր գումարելիներն իրար հավասար են՝ $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \dfrac{N}{n}$, կա՛մ ցանկացած $k \le n$ բնական թվի համար $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ գումարում կգտնվեն $a_{i_1};\ a_{i_2};\ \cdots;\ a_{i_k}$

$(1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n)$ և $a_{j_1};\ a_{j_2};\ \cdots;\ a_{j_k}$ $(1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n)$ «հավաքածուներ» այնպիսին, որ $a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_k} > k \cdot \frac{N}{n}$ և $a_{j_1} + a_{j_2} + \cdots + a_{j_k} < k \cdot \frac{N}{n}$:

Ապացույց: Ակնհայտ է, որ եթե $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ գումարում բոլոր գումարելիներն իրար հավասար են, ապա $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{N}{n}$: Այժմ ենթադրենք՝ $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ գումարում բոլոր գումարելիներն իրար հավասար չեն: Առանց ընդհանրությունը խախտելու ենթադրենք, որ $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ (հակառակ պարագայում a_i թվերը կդասավորենք աճման կարգով և կկատարենք վերանշանակում): Ըստ մեր ենթադրության, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ գումարում բոլոր գումարելիներն իրար հավասար չեն և $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$, հետևաբար կարող ենք պնդել, որ $a_1 < a_n$:

Պնդումը հեշտությամբ կարելի է ապացուցել հակասող ենթադրության մեթոդի անմիջական կիրառմամբ: Իրոք, կատարենք հակասող ենթադրություն, այն է. դիցուք՝ ցանկացած $k \le n$ բնական թվի համար $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ գումարում հնարավոր չէ գտնել $a_{i_1};\ a_{i_2};\ \cdots;\ a_{i_k}$ $(1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n)$ և $a_{j_1};\ a_{j_2};\ \cdots;\ a_{j_k}$ $(1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n)$ «հավաքածուներ» այնպիսին, որ $a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_k} > k \cdot \frac{N}{n}$ և $a_{j_1} + a_{j_2} + \cdots + a_{j_k} < k \cdot \frac{N}{n}$:

Դիտարկենք հետևյալ գումարները՝

$b_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$; $b_2 = a_2 + a_3 + \cdots + a_{k+1}$; $\cdots$; $b_{n-1} = a_{n-1} + a_n + a_1 + \cdots + a_{k-2}$; $b_n = a_n + a_1 + \cdots + a_{k-1}$: Նկատենք, որ $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = k\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right) = kN$: Քանի որ $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ գումարում բոլոր գումարելիներն իրար հավասար չեն և $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$, կնշանակի՝ $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ գումարում ևս բոլոր գումարելիներն իրար հավասար չեն (մասնավորապես, $b_1 < b_{n-k+1}$), հետևաբար, համաձայն պնդում 4-ի, վերջինիս մեջ կգտնվեն այնպիսի երկու b_i և b_j գումարելիներ, որոնց համար տեղի ունեն՝ $b_i > k \cdot \frac{N}{n}$ և $b_j < k \cdot \frac{N}{n}$, ինչը հակասում է մեր ենթադրությանը: Փաստորեն մեր ենթադրությունը կեղծ է և, ըստ այդմ, համաձայն հակասող ենթադրության մեթոդի, պնդումն ապացուցված է:

Այժմ դիտարկենք օրինակներ, որոնց լուծման ընթացքում անմիջականորեն կկիրառենք վերոգրյալ պնդումները:

Օրինակ 11: Շրջանագծի վրա նշված են 1991 հատ թվեր, որոնց գումարը ոչ բացասական է: Ապացուցել, որ այդ թվերի մեջ կգտնվեն 100 միմյանց «հարևան» (կողք-կողքի դասավորված) թվեր, որոնց գումարը ևս ոչ բացասական է:

Լուծում: Կատարենք խնդրում ապացուցման ենթակա պնդմանը հակասող ենթադրություն. դիցուք՝ այդ թվերի մեջ հնարավոր չէ գտնել 100 միմյանց «հարևան» (կողք-կողքի դասավորված) թվեր, որոնց գումարը ևս ոչ բացասական է:

Տրված թվերը, դասավորված ժամսլաքի ուղղությամբ, նշանակենք $a_1;\ a_2;\ \cdots;\ a_{1991}$: Ըստ խնդրի պայմանի՝ $a_1+a_2+\cdots+a_{1991}\geq 0$: Դիտարկենք հետևյալ 1991 գումարները՝ $b_1=a_1+a_2+\cdots+a_{100}$; $b_2=a_2+a_3+\cdots+a_{101}$; $\cdots;\ b_{1991}=a_{1991}+a_1+\cdots+a_{99}$:

Նկատենք, որ $b_1+b_2+\cdots+b_{1991}=$ $=100\left(a_1+a_2+\ \cdots\ +a_{1991}\right)\geq 0$, հետևաբար, պնդում 5-ի համաձայն, $b_1+b_2+\ \cdots\ +b_{1991}$ գումարում կգտնվի b_i գումարելի այնպիսին, որ $b_i\geq 0$ $\left(N=0;\ n=1991;\ b_i\geq\dfrac{N}{n}=0\right)$: Ակնհայտ է, որ հենց այդ b_i գումարելին էլ իրենից կներկայացնի որոնելի 100 միմյանց «հարևան» թվերի գումարը: Փաստորեն մեր ենթադրությունը կեղծ է և, ըստ այդմ, համաձայն հակասող ենթադրության մեթոդի և պնդում 5-ի, խնդրի պնդումն ապացուցված է:

Օրինակ 12: Գնորդը շուկայից գնեց 13 հատ պոմիդոր, 1,5կգ ընդհանուր զանգվածով: Ապացուցել, որ գնված պոմիդորների մեջ կարելի է գտնել.

ա/ ավելի քան 115գ կշռող պոմիդոր,

բ/ 5 հատ պոմիդոր, որոնց գումարային զանգվածը փոքր է 580 գրամից:

Լուծում: Կատարենք խնդրում ապացուցման ենթակա պնդումներին հակասող ենթադրություններ.

դիցուք՝ գնված պոմիդորների մեջ չկա.

- ավելի քան 115գ կշռող պոմիդոր,
- 5 հատ պոմիդոր, որոնց գումարային զանգվածը փոքր է 580 գրամից:

Գնորդի գնած i -րդ պոմիդորի զանգվածը նշանակենք a_i -ով: Ըստ խնդրի պայմանի՝ $a_1+a_2+\cdots+a_{13}=1500$ գրամ, հետևաբար, համաձայն պնդում 4-ի $(n=13;\ N=1500)$, կամ բոլոր պոմիդորներն ունեն նույն զանգվածը՝ $a_1=a_2=\cdots=a_{13}=\dfrac{1500}{13}>115$, կամ էլ պոմիդորների մեջ կգտնվի այնպիսին (դիցուք՝ i -րդը), որի զանգվածը՝ $a_i>\dfrac{1500}{13}>115$: Երկու դեպքում էլ գնված պոմիդորների մեջ կգտնվի ավելի քան 115գ կշռող պոմիդոր:

Նկատենք, որ եթե բոլոր պոմիդորներն ունեն նույն զանգվածը, ապա խնդրի «բ» պնդումը տեղի ունի, քանի որ այդ դեպքում $a_1=a_2=\cdots=a_{13}=\dfrac{1500}{13}\ \Rightarrow\ a_1+a_2+\cdots+a_5=$ $=5\cdot\dfrac{1500}{13}<580$, իսկ եթե բոլոր պոմիդորները չունեն նույն զանգվածը, ապա համաձայն պնդում 7-ի, $k=5$ դեպքում $a_1+a_2+\cdots+a_{13}$ գումարի մեջ կարելի է գտնել այնպիսի $a_{j_1};\ a_{j_2};\ \cdots;\ a_{j_5}$ հավաքածու, որ $a_{j_1}+a_{j_2}+\ \cdots\ +a_{j_5}<$ $<k\cdot\dfrac{N}{n}=5\cdot\dfrac{1500}{13}<580$:

Հենց այդ $a_{j_1};\ a_{j_2};\ \cdots;\ a_{j_5}$ հավաքածուն էլ իրենից կներկայացնի այն որոնելի 5 պոմիդորը, որոնց գումարային զանգվածը փոքր է 580 գրամից:

Փաստորեն մեր ենթադրությունները կեղծ էին և, ըստ այդմ, համաձայն հակասող ենթադրության մեթոդի, պնդում 4-ի և պնդում 7-ի, խնդրի «ա» և «բ» պնդումներն ապացուցված են:

Օրինակ 13: Տրված են 1989 հատ իրական թվեր: Հայտնի է, որ այդ թվերից ցանկացած 10 հատի գումարը դրական է: Ապացուցել, որ բոլոր 1989 հատ թվերի գումարը դրական է:

Լուծում: Կատարենք խնդրում ապացուցման ենթակա պնդմանը հակասող ենթադրություն. դիցուք՝ բոլոր 1989 հատ թվերի գումարը դրական չէ:

Տրված 1989 հատ թվերից ընտրենք կամայական 10 հատը: Ըստ խնդրի պայմանի, այս 10 թվերի գումարը դրական է, հետևաբար, համաձայն պնդում 6-ի, $k=9$ դեպքում այս 10 թվերից կարելի է ընտրել այնպիսի 9-ը, որոնց գումարը ևս դրական է: Տրված 1989 թվերից առանձնացնենք վերջին (վերոգրյալ) 9 թվերը և մնացած 1980 հատ թվերը կամայական ձևով բաժանենք 198 հատ խմբերի՝ յուրաքանչյուրում 10-ական թիվ: Ըստ խնդրի պայմանի՝ ցանկացած 10 թվերի գումարը դրական է, հետևաբար առանձնացված 198 խմբերից յուրաքանչյուրում եղած թվերի գումարը դրական է և, ուրեմն, բոլոր 1980 հատ թվերի գումարը ևս դրական է: Քանի որ սկզբում առանձնացրած 9 հատ թվերի գումարը ևս դրական էր, կնշանակի՝ բոլոր 1989 հատ թվերի գումարը դրական է: Փաստորեն մեր ենթադրությունը կեղծ է և, ըստ այդմ, համաձայն հակասող ենթադրության մեթոդի և պնդում 6-ի, խնդրի պնդումն ապացուցված է:

<u>Ինվարիանտի կիրառման և ներկման մեթոդները:</u>

Որևէ ձևափոխության նկատմամբ ինչ-որ մեծություն կոչվում է *ինվարիանտ*, եթե վերջինս տվյալ ձևափոխության ժամանակ մնում է անփոփոխ:

Մաթեմատիկայի ապացուցման և/կամ հերքման տիպային և ոչ տիպային տարբեր խնդիրներում երբեմն հանդիպում են այնպիսի մեծություններ (կամ մեծությունների այնպիսի հատկություններ), որոնք տվյալ խնդրի պայմաններում մնում են անփոփոխ՝ ինվարիանտ, ընդ որում, այդ մեծությունների ինվարիանտ լինելը պայմանավորված է լինում ոչ թե ինչ-որ թեորեմի ուժով, այլ հենց տվյալ խնդրի դրվածքով կամ ելակետային պայմաններով:

Ինչպես արդեն նշել ենք, հակասող ենթադրության մեթոդի արդյունավետ կիրարկման համար, երբ փորձում ենք ապացուցել որևէ A պնդման ճշմարտացիությունը, կատարում ենք հակասող ենթադրություն՝ ենթադրելով որ տեղի ունի $\bar{A}$ պնդումը, որից հետո տրամաբանական դատողությունների միջոցով փորձում ենք ապացուցել, որ $\bar{A}$ պնդումը կեղծ է: Արդյունքում, համաձայն հակասող ենթադրության մեթոդի, հիմնավորում ենք A պնդման ճշմարտացիությունը: Այս մեթոդի կիրարկման գործընթացում հիմնական դժվարությունը կայանում է հենց տրամաբանական դատողությունների միջոցով $\overline{A}$ պնդման կեղծ լինելն ապացուցելը: Այս փուլում է, որ անհրաժեշտ է, մասնավորապես, ներկման կիրառմամբ հանգել որևէ մեծության կամ մեծության որևէ հատկության անփոփոխելիության, և վերջնարդյունքում, օգտվելով այդ ինվարիանտից, հիմնավորել $\overline{A}$ պնդման կեղծ լինելը:

Ստորև նախապես կդիտարկենք ապացուցման և/կամ հերքման մի քանի օրինակ-խնդիրներ, որոնց լուծման ընթացքում անմիջականորեն կօգտվենք հակասող ենթադրության և ինվարիանտի կիրառման մեթոդներից, մասնավորապես, «կներմուծենք» որոշակի մեծություն և ցույց կտանք, որ մեր ներմուծած մեծությունը տվյալ խնդրի պայմաններում ինվարիանտ է, որից հետո այդ ինվարիանտի անմիջական կիրառման շնորհիվ կապացուցենք կամ կհերքենք ելակետային պնդումը:

Օրինակ 14: Գրատախտակին գրված են $1;\ 2;\ \cdots;\ 20$ բնական թվերը: Յուրաքանչյուր քայլում թույլատրվում է ջնջել այդ թվերից ցանկացած երկուսը և փոխարենն ավելացնել ջնջված թվերի գումարից մեկով պակաս բնական թիվը, այսինքն՝ յուրաքանչյուր քայլում ջնջում ենք որևէ a և b թվեր ու փոխարենն ավելացնում ենք $a+b-1$ թիվը: Ապացուցել, որ 19 քայլերից հետո գրատախտակին հնարավոր չէ ստանալ 180:

Լուծում: Կատարենք խնդրում ապացուցման ենթակա պնդմանը հակասող ենթադրություն. դիցուք՝ թվով 19 քայլերից հետո գրատախտակին հնարավոր է ստանալ 180: Պարզ է, որ յուրաքանչյուր հաջորդ քայլում գրատախտակին գրված թվերի քանակը պակասում է 1-ով: «Ներմուծենք» հետևյալ մեծությունը. X -ով նշանակենք յուրաքանչյուր փուլում գրատախտակին եղած թվերի գումարի և այդ թվերի քանակի տարբերությունը, այսինքն, եթե ինչ-որ պահի գրատախտակին գրված են հետևյալ n հատ թվերը՝ $a_1;\ a_2;\cdots;\ a_n$, ապա $X_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n - n$: Այժմ հաշվենք մեր կողմից «ներմուծված» X մեծությունը, երբ հաջորդ փուլում փոփոխում ենք, օրինակ՝ a_1 և a_2 թվերը: Արդյունքում գրատախտակին կլինեն հետևյալ $n-1$ հատ թվերը՝ $a_1 + a_2 - 1;\ a_3;\ \cdots;\ a_n$, որոնց պարագայում մեր կողմից «ներմուծված» X մեծության համար կստանանք՝

$$X_{n-1} = \left(a_1 + a_2 - 1\right) + a_3 + \cdots + a_n - \left(n-1\right) = \\ = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n - n = X_n = const :$$

Ինչպես տեսնում ենք, մեր կողմից «ներմուծված» X մեծությունը մնում է **<u>ինվարիանտ</u>**: Ուստի կարող ենք պնդել, որ $X = X_{20} = \left(1 + 2 + \ \cdots \ + 20\right) - 20 = 190 = X_1$, հետևաբար, համաձայն «ներմուծված» X մեծության «սահմանման», 19 քայլերից հետո գրատախտակին մնացած թիվը հավասար կլինի $X_1 + 1 = 191$-ի:

Հանգեցինք հակասության: Փաստորեն մեր ենթադրությունը կեղծ է և, ըստ այդմ, համաձայն հակասող ենթադրության և ինվարիանտի կիրառման մեթոդների, խնդրի պնդումն ապացուցված է. 19 քայլերից հետո գրատախտակին հնարավոր չէ ստանալ 180:

Օրինակ 15: Կանոնավոր վեցանկյան գագաթներում ժամսլաքի ուղղությամբ գրված են 0; 1; 2; 0; 2; 1 բնական թվերը (նշված հերթականությամբ)։ Յուրաքանչյուր քայլում թույլատրվում է երկու «հարևան» թվերից յուրաքանչյուրը մեծացնել միևնույն թվով, այսինքն՝ յուրաքանչյուր քայլում որևէ երկու «հարևան» a և b թվեր փոխարինում ենք $(a+k)$-ով և $(b+k)$-ով։ Ապացուցել, որ որոշակի վերջավոր քայլերից հետո հնարավոր չէ հասնել նրան, որ վեցանկյան գագաթներում եղած թվերը լինեն միմյանց հավասար։

Լուծում: Կատարենք խնդրում ապացուցման ենթակա պնդմանը հակասող ենթադրություն. դիցուք՝ որոշակի վերջավոր քայլերից հետո հնարավոր է հասնել նրան, որ վեցանկյան գագաթներում եղած թվերը լինեն միմյանց հավասար։

Դիցուք՝ որևէ փուլում վեցանկյան գագաթներում ժամսլաքի ուղղությամբ և նշված հերթականությամբ գրված են հետևյալ թվերը՝ a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6 ։ «Ներմուծենք» հետևյալ մեծությունը՝ $X = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6$ ։ Նկատենք, որ եթե սահմանված ձևով որևէ երկու հարևան գագաթներում եղած թվերը միևնույն չափով մեծացնենք, ապա արդյունքում մեր կողմից «ներմուծված» X մեծությունը կմնա **<u>ինվարիանտ</u>**։

Մյուս կողմից հեշտ է նկատել, որ ելակետային թվերի վեցնյակի համար $X = 0-1+2-0+2-1 = 2$, մինչդեռ, եթե ինչ-որ փուլում վեցանկյան գագաթներում լինեն միմյանց հավասար թվեր, դիցուք, օրինակ՝ միայն a-եր, ապա այդ վեցնյակի համար կունենանք՝ $X = a-a+a-a+$

$+a-a=0\neq 2$ ։

Հանգեցինք հակասության։ Փաստորեն մեր ենթադրությունը կեղծ է և, ըստ այդմ, համաձայն հակասող ենթադրության և ինվարիանտի կիրառման մեթոդների, խնդրի պնդումն ապացուցված է. կամայական վերջավոր քայլերից հետո վեցանկյան գագաթներում չեն կարող լինել միմյանց հավասար թվեր։

Օրինակ 16։ Տրված է իրական թվերի հետևյալ քառյակը՝ $32;\ 46;\ 52;\ 66$ ։ Յուրաքանչյուր քայլում թույլատրվում է կազմել թվերի նոր քառյակ՝ նշված թվերից յուրաքաչյուրը փոխարինելով մյուս երեքի միջին թվաբանականով։ Ապացուցել, որ այդպիսի գործողությունների արդյունքում որոշակի վերջավոր քայլերից հետո հնարավոր չէ ստանալ $36;\ 45;\ 50;\ 56$ քառյակը։

Լուծում։ Կատարենք խնդրում ապացուցման ենթակա պնդմանը հակասող ենթադրություն. դիցուք՝ որոշակի վերջավոր քայլերից հետո ելակետային քառյակից հնարավոր է ստանալ $36;\ 45;\ 50;\ 56$ քառյակը։

Դիցուք՝ որևէ փուլում ստացել ենք թվերի հետևյալ քառյակը՝ $a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4$ ։ «Ներմուծենք» հետևյալ մեծությունը՝ $X=a_1+a_2+a_3+a_4$ ։ Համաձայն խնդրի պայմանների՝ հաջորդ փուլում վերը նշած $a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4$ քառյակից կստանանք հետևյալ նոր քառյակը՝

$$\frac{a_2+a_3+a_4}{3};\ \frac{a_1+a_3+a_4}{3};\ \frac{a_1+a_2+a_4}{3};\ \frac{a_1+a_2+a_3}{3}\ ։$$

Այս քառյակի համար ևս հաշվենք X մեծությունը՝

$$X=\frac{a_2+a_3+a_4}{3}+\frac{a_1+a_3+a_4}{3}+\frac{a_1+a_2+a_4}{3}+\frac{a_1+a_2+a_3}{3}= \quad :$$
$$=a_1+a_2+a_3+a_4=const$$

Փաստորեն մեր կողմից «ներմուծված» X մեծությունը մնում է **<u>ինվարիանտ</u>**:

Մյուս կողմից հեշտ է նկատել, որ ելակետային քառյակի համար $X=32+46+52+66=196$, մինչդեռ, վերջնարդյունքում ակնկալվող քառյակի համար $X=36+45+50+56=187\neq 196$:

Հանգեցինք հակասության: Փաստորեն մեր ենթադրությունը կեղծ է և, ըստ այդմ, համաձայն հակասող ենթադրության և ինվարիանտի կիրառման մեթոդների, խնդրի պնդումն ապացուցված է. կամայական վերջավոր քայլերից հետո 32; 46; 52; 66 քառյակից հնարավոր չէ ստանալ 36; 45; 50; 56 քառյակ:

Համաձայն վերոգրյալի՝ կարող ենք փաստել, որ յուրաքանչյուր կոնկրետ խնդրում ըստ էության հիմնական դժվարությունը կայանում է նրանում, որ ի սկզբանե ամենևին պարզ չէ, նրանում կիրառելի՞ է արդյոք ինվարիանտի կիրառման մեթոդը, թե՞ ոչ և բացի այդ, այս մեթոդի կիրառման ցանկության դեպքում անգամ, խնդրի տեսքից ու դրվածքից ելնելով, այնքան էլ հեշտ չէ միանգամից կռահել, թե նրանում ո՞ր մեծությունը կամ մեծության ո՞ր հատկությունն է ինվարիանտ: Դրա համար ֆորմալ առումով ինվարիանտի կիրառման մեթոդին ծանոթանալուց զատ անհրաժեշտ է տրամաբանական խնդիրների լուծման որոշակի հմտություն, կարողություն և փորձառություն:

Տարբեր տիպային և ոչ տիպային խնդիրներում երբեմն հենց ներկման կիրառմամբ է հնարավոր լինում հանգել որևէ մեծության կամ մեծության որևէ հատկության անփոփոխելիության, և վերջնարդյունքում, օգտվելով այդ ինվարիանտից և հակասող ենթադրության մեթոդի գործիքակազմից, հասնել առաջադրված պնդման ապացույցին:

Դիտարկենք երկու օրինակ:

Օրինակ 17: Սարդը գտնվում է անվերջ քառակուսային ցանցի վանդակներից մեկում: Յուրաքանչյուր քայլում սարդը տեղափոխվում է իր վերին, ստորին, աջ կամ ձախ հարևան վանդակներից որևէ մեկը: Ապացուցել, որ 2023 քայլերից հետո սարդը չի կարող վերադառնալ իր սկզբնական դիրքը:

Լուծում: Կատարենք հակասող ենթադրություն. դիցուք՝ 2023 քայլերից հետո սարդը կարող է վերադառնալ իր սկզբնական դիրքը: Անվերջ քառակուսային ցանցը շախմատաձև ***<u>ներկենք</u>*** սև-սպիտակ գույներով այնպես, որ սարդը սկզբում գտնվի սպիտակ վանդակում: Հեշտ է նկատել, որ յուրաքանչյուր հաջորդ քայլում սարդը տեղափոխվում է այլ գույնի վանդակ, քանի որ շախմատաձև ներկման դեպքում ամեն մի վանդակի աջ, ձախ, վերին կամ ստորին հարևան վանդակը կլինի այլ գույնի՝ տվյալ վանդակի գույնի հետ համեմատած:

Համաձայն վերոգրյալի՝ կարող ենք պնդել, որ կամայական զույգ թվով քայլերից հետո սարդը կհայտնվի նույն գույնի վանդակում, ինչ գույնի վանդակից որ սկսել էր շարժվել (առաջին **<u>ինվարիանտ</u>**), իսկ կամայական կենտ թվով քայլերից հետո սարդը կհայտնվի այլ գույնի վանդակում, ինչ գույնի վանդակից որ սկսել էր շարժվել (երկրորդ **<u>ինվարիանտ</u>**), հետևաբար, համաձայն այս ինվարիանտների, կարող ենք պնդել, որ 2023 կամայական քայլերից հետո սարդը չի կարող վերադառնալ իր սկզբնական դիրքը: Փաստորեն մեր ենթադրությունը կեղծ է և, ըստ այդմ, համաձայն հակասող ենթադրության և ինվարիանտի կիրառման մեթոդների, 2023 քայլերից հետո սարդը չի կարող վերադառնալ իր սկզբնական դիրքը:

Օրինակ 18: 2023 հատ ատամնանիվները գտնվում են միևնույն «փակ» շղթայում, այսինքն՝ 1-ն ամրակցված է 2-ին, 2-ը՝ 3-ին, և այլն, 2022-րդն՝ 2023-րդին և 2023-րդը՝ 1-ին: Ապացուցել, որ այս համակարգը չի կարող «աշխատել»:

Լուծում: Կատարենք հակասող ենթադրություն. դիցուք՝ խնդրում նկարագրված համակարգը կարող է աշխատել: Ատամնանիվները մեկընդմեջ ***<u>ներկենք</u>*** սև և սպիտակ գույներով. 1-ը՝ սև, 2-ը՝ սպիտակ, 3-ը՝ սև և այլն 2023-րդը՝ սև: Նկատենք, որ եթե որևէ ատամնանիվ պտտվում է ժամսլաքի ուղղությամբ, ապա իրեն ամրակցված /հարևան/ ատամնանիվը կպտտվի ժամսլաքի հակառակ ուղղությամբ: Պարզ է, որ յուրաքանչյուր ատամնանիվ կարող է պտտվել կա՛մ ժամսլաքի ուղղությամբ, կա՛մ ժամսլաքին հակառակ ուղղությամբ: Առանց ընդհանրությունը խախտելու ենթադրենք, որ 1-ին ատամնանիվը պտտվում է ժամսլաքի ուղղությամբ: Այդ դեպքում հեշտ է նկատել, որ բոլոր սև գույնի ատամնանիվները պտտվում են ժամսլաքի ուղղությամբ (առաջին **ինվարիանտ**), իսկ բոլոր սպիտակ գույնի ատամնանիվները պտտվում են ժամսլաքի հակառակ ուղղությամբ (երկրորդ **ինվարիանտ**): Արդյունքում միմյանց հետ ամրակցված 1-ին և 2023-րդ անիվները կպտտվեն ժամսլաքի ուղղությամբ, այսինքն՝ նույն ուղղությամբ, ինչը հնարավոր չէ /քանի որ վերջիններս միմյանց ամրակցված են/: Հանգեցինք հակասության, փաստորեն մեր ենթադրությունը կեղծ է և, ըստ այդմ, համաձայն հակասող ենթադրության և ինվարիանտի կիրառման մեթոդների, խնդրում նկարագրված համակարգը չի կարող աշխատել:

Ինչպես տեսնում ենք, վերոգրյալ օրինակներում ներկումը հնարավորություն տվեց օգտվել ինվարիանտի կիրառման մեթոդից, գտնել ինվարիանտ և վերջնարդյունքում, հակասող ենթադրության մեթոդի կիրառմամբ հասնել առաջադրված պնդման ապացույցին:

Ապացուցման և/կամ հերքման տարբեր խնդիրներում երբեմն հենց ներկման և հակասող ենթադրության մեթոդների համատեղ կիրառմամբ հնարավոր է լինում հասնել առաջադրված պնդման ապացույցին:

Դիտարկենք մի քանի օրինակներ:

Օրինակ 19: 5x5 չափսերի քառակուսային ցանցի յուրաքանչյուր վանդակում նստած է մեկ մորեխ:

Կրակոցից հետո յուրաքանչյուր մորեխ տեղափոխվում է հարևան որևէ վանդակ (երկու վանդակներ համարվում են հարևան, եթե ունեն ընդհանուր կողմ)։ Ապացուցել, որ կրակոցից հետո վանդակներից առնվազն մեկում մորեխ չի լինի։

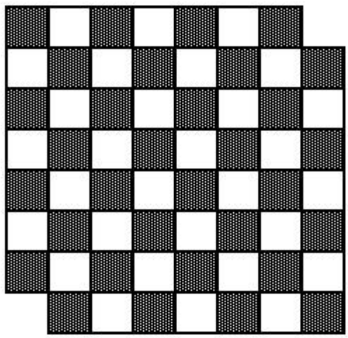
Լուծում: Կատարենք հակասող ենթադրություն. դիցուք՝ կրակոցից հետո բոլոր վանդակներում կլինեն մորեխներ։ Օգտվենք «ներկման» մեթոդից։ Տրված քառակուսային ցանցի վանդակները **ներկենք** շախմատաձև՝ սև և սպիտակ գույներով (ստորին ձախ վանդակը կներկենք սև գույնով)։ Արդյունքում կունենանք 13 սև և 12 սպիտակ գույնի վանդակներ։ Հեշտ է նկատել, որ երկու կամայական հարևան վանդակներ կլինեն տարբեր գույների, հետևաբար ակնհայտ է, որ կրակոցից հետո 13 սև վանդակներից յուրաքանչյուրում գտնվող մորեխները կլքեն այդ վանդակները՝ տեղափոխվելով հարևան վանդակներ, և թվով 13 այդ նույն սև վանդակներում կարող են հայտնվել միայն թվով 12 սպիտակ վանդակներում գտնվող մորեխները և, ուրեմն, համաձայն Դիրիխլեի պակասորդով սկզբունքի, սև վանդակներից առնվազն մեկը կմնա դատարկ։ Կնշանակի՝ մեր նախնական ենթադրությունը սխալ է, ըստ այդմ, համաձայն հակասող ենթադրության մեթոդի, խնդրի պնդումն ապացուցված է։

Ըստ էության բերված լուծումը հնարավորություն է տալիս ընդհանրացնել օրինակ 19-ը և համանման պնդումներ ձևակերպել ցանկացած ($2k+1$) x ($2n+1$)

քառակուսային և/կամ ուղղանկյուն տիրույթների համար (որտեղ *k*-ն և *n*-ը կամայական բնական թվեր են), քանզի նմանատիպ յուրաքանչյուր տիրույթ շախմատաձև սև-սպիտակ գույներով ներկելիս արդյունքում կունենանք անհավասար թվով սև և սպիտակ վանդակներ:

Օրինակ 20: 8x8 չափսերի քառակուսուց հեռացրել են անկյունագծային ստորին ամենաձախ և վերին ամենաաջ վանդակները: Ապացուցել, որ ստացված պատկերը հնարավոր չէ ծածկել 31 հատ 1x2 չափսերի ուղղանկյուն «դոմինոներով»:

Լուծում: Կատարենք հակասող ենթադրություն. դիցուք՝ տրված տիրույթը հնարավոր է ծածկել 31 հատ 1x2 չափսերի ուղղանկյուն «դոմինոներով» Օգտվենք «ներկման» մեթոդից: Ելակետային տիրույթը շախմատաձև ներկենք սև և սպիտակ գույներով այնպես, ինչպես ցույց է տրված նկար 5-ում: Հեշտ է նկատել, որ 1x2 չափսերի յուրաքանչյուր ուղղանկյուն տվյալ

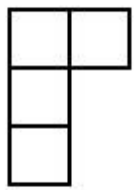


Նկ. 5

տիրույթում ինչ դիրք էլ զբաղեցնի, կծածկի մեկ սպիտակ և մեկ սև գույնի վանդակներ, հետևաբար 31 հատ 1x2 չափսերի ուղղանկյուններով հնարավոր է ծածկել 31 հատ սպիտակ և 31 հատ սև գույնի վանդակներ, մինչդեռ նկատենք, որ ներկման արդյունքում ելակետային տիրույթում սև և սպիտակ գույներով վանդակների քանակները միմյանց հավասար չեն (ունենք 32 հատ սև և 30 հատ սպիտակ վանդակներ)։ Հանգեցինք հակասության։ Կնշանակի՝ մեր նախնական ենթադրությունը սխալ է, ըստ այդմ, համաձայն հակասող ենթադրության մեթոդի, խնդրի պնդումն ապացուցված է՝ այդպիսի տիրույթն անհնար է ծածկել 31 հատ 1x2 չափերի ուղղանկյուններով։

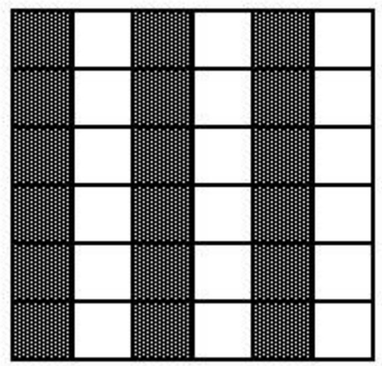
Ըստ էության բերված լուծումը հնարավորություն է տալիս ընդհանրացնել օրինակ 20-ը և համանման պնդում ձևակերպել ցանկացած nxn չափերի քառակուսային տիրույթի համար (որտեղ n-ը 2-ը գերազանցող կամայական բնական թիվ է), քանզի նմանատիպ յուրաքանչյուր տիրույթ շախմատաձև սև-սպիտակ գույներով ներկելիս արդյունքում կունենանք անհավասար թվով սև և սպիտակ վանդակներ։

Օրինակ 21։ Ապացուցել, որ 6x6 չափերի քառակուսին հնարավոր չէ ծածկել նկար 6-ում պատկերված «Г»-աձև 9 հատ պատկերներով։



Նկ. 6

Լուծում։ Կատարենք հակասող ենթադրություն. դիցուք՝ 6x6 չափերի քառակուսին հնարավոր է ծածկել նկար 6-ում պատկերված «Г»-աձև 9 հատ պատկերներով։ Օգտվենք «ներկման» մեթոդից։ Ելակետային տիրույթը ներկենք սև և սպիտակ գույներով այնպես, ինչպես ցույց է տրված նկար 7-ում։ Հեշտ է նկատել, որ «Г»-աձև յուրաքանչյուր պատկեր տվյալ տիրույթում ինչ դիրք էլ զբաղեցնի, կծածկի կենտ թվով սև վանդակներ (1 կամ 3 հատ), հետևաբար 9 հատ «Г»-աձև պատկերները միասին դարձյալ կծածկեն կենտ թվով սև վանդակներ, մինչդեռ նկատենք, որ ներկման արդյունքում ելակետային տիրույթում ունենք զույգ քանակի սև գույնի վանդակներ՝ 18 հատ: Հանգեցինք հակասության: Կնշանակի՝ մեր նախնական ենթադրությունը կեղծ է և, ուրեմն, համաձայն հակասող ենթադրության մեթոդի, խնդրի պնդումն ապացուցված է՝ այդպիսի տիրույթը անհնար է ծածկել «Г»-աձև 9 հատ պատկերներով:

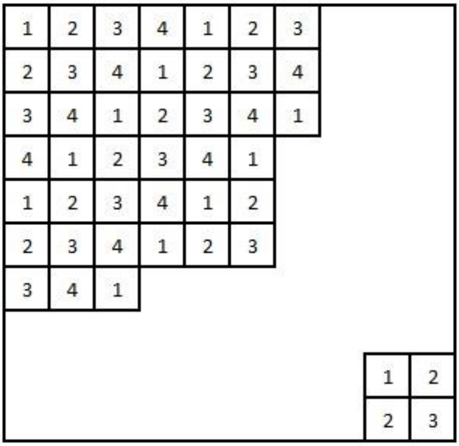


Նկ. 7

Օրինակ 22: 102x102 չափսերի քառակուսին հնարավո՞ր է արդյոք ծածկել 2601 հատ 1x4 չափսերի ուղղանկյուններով:

Լուծում: Ձևակերպենք ուղիղ պնդում (A պնդում). 102x102 չափսերի քառակուսին հնարավոր չէ ծածկել 2601 հատ 1x4 չափսերի ուղղանկյուններով: Օգտվենք «ներկման» մեթոդից: Ելակետային տիրույթը ներկենք «1», «2», «3» և «4» գույներով, ինչպես ցույց է տրված նկար 8-ում (նկարում պատկերված է ելակետային 102x102 չափսերի քառակուսու վերին ձախ և ստորին աջ անկյունները, նույն օրինաչափությամբ ներկվում են տիրույթի բոլոր վանդակները): Կատարենք հակասող ենթադրություն ($\overline{A}$

պնդում). դիցուք՝ տրված տիրույթը հնարավոր է ծածկել 2601 հատ 1x4 չափսերի ուղղանկյուններով: Հեշտ է նկատել, որ 1x4 չափսերի յուրաքանչյուր ուղղանկյուն տվյալ տիրույթում ինչ դիրք էլ զբաղեցնի, կծածկի բոլոր գույներից մեկական վանդակ, հետևաբար 2601 հատ 1x4 չափսերի ուղղանկյուններով հնարավոր է ծածկել 2601-ական «1», «2», «3» և «4» գույների վանդակներ, մինչդեռ նկատենք, որ ներկման



Նկ. 8

արդյունքում ելակետային տիրույթում «1», «2», «3» և «4» գույներով վանդակների քանակները միմյանց հավասար չեն (ունենք 2601-ական «1» և «3» գույների վանդակներ, 2602 հատ «2» գույնի վանդակ և 2600 հատ «4» գույնի վանդակ): Կնշանակի՝ մեր ենթադրությունը կեղծ է և, ուրեմն, համաձայն հակասող ենթադրության մեթոդի, այդպիսի տիրույթն անհնար է ծածկել 2601 հատ 1x4 չափսերի ուղղանկյուններով:

Պատ.՝ ոչ, հնարավոր չէ:

Նկատենք, որ դիտարկված օրինակներում փոխվում է ինչպես ներկման եղանակը, այնպես էլ օգտագործվող գույների քանակը, բայց մոտեցումը մնում է անփոփոխ՝

ներկման և հակասող ենթադրության մեթոդների անմիջական կիրառմամբ ապացուցում և/կամ հերքում ենք խնդրում առաջադրված պնդումը:

«Եզրայինի» կանոնը:

Հակասող ենթադրության մեթոդի կիրարկումն ապահովող մեկ այլ արդյունավետ և գեղեցիկ «գործիք» է եզրայինի կանոնը: Այն կարելի է հակիրճ ամփոփել հետևյալ բառերում. «հաշվի առեք եզրայինը, էքստրեմալը, ծայրահեղը»: «Եզրայինի» կանոնի էությունը կայանում է հետևյալում. որևէ պնդում ապացուցելիս կամ հերքելիս, հիմք ընդունելով հակասող ենթադրության մեթոդը, դիտարկել պնդման օբյեկտներից «ծայրահեղ հատկություններով» օժտվածը: Եթե, օրինակ՝ խնդիրը վերաբերում է հորիզոնական ուղղի վրա դասավորված վերջավոր կետերին, ապա առաջարկվում է ուշադրությունը կենտրոնացնել այդ հավաքածուի առավել «ծայրահեղ» կետի ՝ ամենաձախ կամ ամենաաջ կետի վրա: Եթե խնդրի մեջ իրական թվերի որոշակի վերջավոր հավաքածու է հայտնվում, ապա «եզրայինի» կանոնը առաջարկում է հաշվի առնել այդ թվերից ամենամեծը կամ ամենափոքրը (եթե, իհարկե, այդպիսիք գոյություն ունեն): Եթե խնդրի մեջ հատվածների (շրջանագծերի) որոշակի վերջավոր հավաքածու է հայտնվում, ապա «եզրայինի» կանոնը առաջարկում է հաշվի առնել այդ հատվածներից (շրջանագծերից) ամենամեծ կամ ամենափոքր երկարություն (շառավիղ) ունեցողը և այլն:

Մեթոդի էությունը և կիրառելիության սահմաններն ավելի լավ պատկերացնելու համար դիտարկենք մի քանի օրինակներ։

Օրինակ 23։ Անվերջ շախմատային «դաշտի» վանդակներում գրված են բնական թվեր այնպես, որ յուրաքանչյուր թիվ հավասար է իր «հարևան» (այսինքն՝ աջ, ձախ, վերին և ստորին) թվերի միջին թվաբանականին։ Ապացուցել, որ գրված բոլոր թվերը միմյանց հավասար են։

Լուծում։ Կատարենք հակասող ենթադրություն. դիցուք՝ գրված բոլոր թվերը միմյանց հավասար չեն։ Օգտվենք «եզրայինի» կանոնից։ Քանի որ, ըստ խնդրի պայմանի, անվերջ շախմատային «դաշտի» վանդակներում գրված են բնական թվեր, կնշանակի՝ գրված թվերի մեջ անպայման կլինի ամենափոքր բնական թիվ (քանզի, ինչպես բնական թվերի բազմությունը, այնպես էլ վերջինիս ցանկացած ենթաբազմություն, պարունակում է ամենափոքր բնական թիվ)։ Դիցուք այդ ամենափոքր բնական թիվը k-ն է, որը հանդիպում է անվերջ շախմատային «դաշտի» ինչ-որ վանդակում (եթե k բնական թիվը հանդիպում է մի քանի և/կամ անվերջ թվով վանդակներում, ապա կդիտարկենք այդ վանդակներից որևէ մեկը), իսկ նրա «հարևան» վանդակներում գրված թվերն են՝ a-ն, b-ն, c-ն և d-ն։ Ըստ խնդրի պայմանի՝ $k=(a+b+c+d)/4$, որտեղից կունենանք՝ $a+b+c+d=4k$։ Մյուս կողմից, քանի որ k-ն վանդակներում գրված թվերից ամենափոքրն էր, կնշանակի՝ $k \le a$, $k \le b$, $k \le c$ և $k \le d$, հետևաբար $a+b+c+d \ge 4k$, ընդ որում, եթե $k \le a$, $k \le b$, $k \le c$ և $k \le d$ անհավասարություններից որևէ մեկը տեղի ունի խիստ ձևով, ապա կունենանք՝ $a+b+c+d>4k$, ինչը կհակասի խնդրի պահանջից բխող a+b+c+d=4k պայմանին, և, ուրեմն, k≤a, k≤b, k≤c և k≤d ոչ խիստ անհավասարություններից և ոչ մեկը խիստ ձևով տեղի չունի, այսինքն՝ k=a=b=c=d: Համանման դատողությունների շնորհիվ կստացվի, որ k տարրը պարունակող ամբողջ տողի և ամբողջ սյան վրա գրված են միայն k-եր, որտեղից էլ անմիջականորեն կհետևի, որ անվերջ շախմատային «դաշտի» բոլոր վանդակներում գրված են միայն k-եր, հետևաբար մեր ենթադրությունը ճշմարիտ չէր (կեղծ էր) և, ուրեմն, համաձայն հակասող ենթադրության մեթոդի, գրված բոլոր թվերը միմյանց հավասար են: Պնդումն ապացուցված է:

Օրինակ 24: Հարթության վրա տարված են $n>3$ հատ կամայական ուղիղներ, որոնցից ոչ մի երկուսը միմյանց զուգահեռ չեն և ոչ մի երեքը չեն անցնում միևնույն կետով: Արդյունքում ինչպես այդ ուղիղները, այնպես էլ հարթությունը, բաժանվում են մասերի: Ապացուցել, որ այդ n ուղիղներից որ մեկն էլ որ դիտարկենք, վերջինիս և հարթության հարակից մասերից առնվազն մեկը ունի եռանկյան տեսք:

Լուծում: Կատարենք հակասող ենթադրություն. դիցուք՝ տրված ուղիղներից յուրաքանչյուրի պարագայում վերջինիս և հարթության հարակից մասերից և ոչ մեկը չունի եռանկյան տեսք: Դիտարկենք ուղիղներից որևէ մեկը և այն նշանակենք l-ով: Ըստ խնդրի պայմանի՝ $n>3$ հատ ուղիղներից յուրաքանչյուր երկուսը հատվում են և ոչ մի երեք ուղիղ չի հատվում միևնույն կետում, կնշանակի՝ $n>3$ հատ ուղիղների հատումից կառաջանան $n(n-1)/2$

հատ (վերջավոր քանակի) կետեր: Համաձայն «եզրայինի» կանոնի՝ վերը նշած $n(n-1)/2$ հատ կետերի մեջ կգտնվի առնվազն մեկ կետ, որը չի պատկանում l ուղղին և նրանից հեռացված է նվազագույն չափով: Այդ կետը (կամ այդպիսի կետերից որևէ մեկը) նշանակենք P-ով: Պարզ է, որ P կետն «առաջացել» է տրված $n>3$ հատ ուղիղներից որևէ երկուսի (և միայն այդ երկուսի) հատումից: Այդ ուղիղները նշանակենք, համապատասխանաբար, l_1 և l_2: Ապացուցենք, որ l; l_1 և l_2 ուղիղների հատումից առաջացած եռանկյունը l ուղղի համար խնդրի պայմաններին բավարարող որոնելի եռանկյունն է: Իրոք, եթե կատարենք հակասող ենթադրություն և ընդունենք, որ տրված $n>3$ հատ ուղիղների մեջ գոյություն ունի ինչ-որ d ուղիղ, որը հատում է վերը նշած եռանկյունը, ապա այդ ուղիղը, բնականաբար կհատի նաև l_1 և l_2 ուղիղներն ինչ-որ P_1 և P_2 կետերում, որոնք l ուղղից կունենան ավելի փոքր հեռավորություն, քան P կետը, ինչը, «եզրայինի» կանոնի համաձայն, հակասում է P կետի ընտրության սկզբունքին: Ըստ էության հակասող ենթադրության մեթոդի կրկնակի կիրարկման արդյունքում պնդումն ապացուցված է:

Օրինակ 25: Հարթության վրա տրված են $n \geq 3$ հատ միևնույն ուղղին չպատկանող կամայական կետեր: Ապացուցել, որ գոյություն ունի շրջանագիծ, որն անցնում է այդ կետերից որևէ երեքով և իր ներսում տրված կետերից չի պարունակում:

Լուծում: Կատարենք հակասող ենթադրություն.

դիցուք՝ ցանկացած շրջանագիծ, որն անցնում է տրված կետերից որևէ երեքով, իր ներսում պարունակում է տրված կետերից առնվազն մեկը: Քանի որ ունենք հարթությանը պատկանող վերջավոր քանակի կետեր, համաձայն «եզրայինի» կանոնի, այդ կետերով (որպես ծայրակետեր) որոշվող հատվածների մեջ կգտնվի ամենափոքր երկարություն ունեցողը:

Դիցուք՝ A-ն և B-ն տրված կետերից այն երկուսն են, որոնց միջև հեռավորությունն ամենափոքրն է (իսկ եթե կետերի այդպիսի զույգը միակը չէ, ապա կդիտարկենք այդպիսի զույգերից որևէ մեկը): Քանի որ, ըստ մեր ընտրության, AB հատվածի երկարությունը նվազագույնն է, կնշանակի՝ AB տրամագծով շրջանագծի վրա, բացի A-ից և B-ից, տրված կետերից որևէ այլ կետ չի կարող գտնվել: Համաձայն «եզրայինի» կանոնի՝ C-ով նշանակենք տրված կետերից այն մեկը, որի համար $\angle ACB$-ն մեծագույնն է (իսկ եթե այդպիսի կետը միակը չէ, ապա կդիտարկենք դրանցից որևէ մեկը): Ակնհայտ է, որ ABC եռանկյանն արտագծած շրջանագիծն իր ներսում տրված կետերից չի պարունակում (հակառակ դեպքում $\angle ACB$-ն չի կարող լինել մեծագույնը), հետևաբար մեր ենթադրությունը ճշմարիտ չէր (կեղծ էր) և, ուրեմն, հակասող ենթադրության մեթոդի կիրարկման և «եզրայինի» կանոնի կրկնակի կիրառման արդյունքում պնդումն ապացուցված է:

Օրինակ 26: Ապացուցել, որ $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$ հավասարումը չունի ոչ զրոյական ամբողջ լուծումներ:

Լուծում: Հեշտ է նկատել, որ տրված հավասարումն ունի զրոյական լուծում. $x=y=z=0$ -ն տրված հավասարման լուծում է: Կատարենք հակասող ենթադրություն. դիցուք՝ տրված հավասարումն ունի նաև ոչ զրոյական լուծում, այսինքն գոյություն ունեն x; y և z ամբողջ թվեր այնպիսին, որ $x^3-2y^3-4z^3=0$ և $|x|+|y|+|z|\neq 0$: Համաձայն «եզրայինի» կանոնի՝ $(x;y;z)$ հնարավոր ոչ զրոյական լուծումների մեջ կգտնվի այնպիսի լուծում, որի համար $|x|+|y|+|z|$ գումարը, որպես բնական թիվ, փոքրագույնն է: Դիցուք՝ $(x';y';z')$ եռյակը տրված հավասարման այն ոչ զրոյական լուծումն է (կամ լուծումներից որևէ մեկը), որի համար $|x'|+|y'|+|z'|\to\min$: Հեշտ է նկատել, որ այդ դեպքում $(x')^3$ -ը զույգ է, հետևաբար $x'=2x''$, որտեղից կստանանք, որ $(y')^3$ -ը ևս զույգ է, հետևաբար $y'=2y''$, որտեղից կստանանք, որ $(z')^3$ -ը ևս զույգ է, հետևաբար $z'=2z''$, որտեղից կստանանք՝ $(x'')^3-2(y'')^3-4(z'')^3=0$: Փաստորեն ամբողջ թվերի $(x'';y'';z'')$ եռյակը ևս տրված հավասարման լուծում է, ընդ որում $|x''|+|y''|+|z''|=(|x'|+|y'|+|z'|)/2<|x'|+|y'|+|z'|$, ինչը հակասում է $|x'|+|y'|+|z'|\to\min$ պայմանին, հետևաբար մեր ենթադրությունը կեղծ է և, ուրեմն, համաձայն հակասող ենթադրության մեթոդի, տրված հավասարումը չի կարող ունենալ ոչ զրոյական ամբողջ լուծում: Պնդումն ապացուցված է:

Հավելենք, որ տրված հավասարումը կարելի է լուծել նաև «անվերջ վայրէջքի» մեթոդով, որին կանդրադառնանք հաջորդ պարագրաֆում:

Ինչպես տեսնում ենք, «եզրայինի» կանոնի կիրառման պարագայում մենք լրացուցիչ քննարկման առարկա ենք դարձնում խնդրում դիտարկվող օբյեկտներից «եզրային» կամ «էքստրեմալ» հատկություններով օժտված օբյեկտը, ընդ որում, բուն օբյեկտը կարող է լինել ինչպես առկա (տե՛ս օրինակ 23-ում վանդակներում գրված բնական թվերից ամենափոքրը կամ օրինակ 24-ում դիտարկված ուղղից նվազագույն չափով հեռացված կետը կամ օրինակ 25-ում ամենափոքր երկարություն ունեցողը հատվածը), այնպես էլ մեր կողմից «ներմուծված» (տե՛ս օրինակ 26-ը, երբ լուծում ենք տրված անորոշ հավասարումը և, ելնելով խնդրի պայմաններից, ներմուծում ենք $|x|+|y|+|z|$ գումարը և քննարկման առարկա ենք դարձնում վերջինիս նվազագույն լինելը):

Ամփոփելով կարող ենք փաստել, որ թե՛ Դիրիխլեի սկզբունքը, թե՛ ինվարիանտի կիրառման մեթոդը, թե՛ ներկման մեթոդը և թե՛ «եզրայինի» կանոնը հակասող ենթադրության մեթոդի կիրարկումն ապահովող արդյունավետ և գեղեցիկ «գործիքներ» են, որոնք իրենց օգտակար և արդյունավետ կիրառությունները կարող են ունենալ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում ապացուցման և հերքման խնդիրների, ինչպես նաև անորոշ հավասարումների լուծման ժամանակ:

§2. Դիոֆանտյան (անորոշ) հավասարումներ։

Մաթեմատիկական շատ խնդիրների լուծումներ բերվում են այնպիսի հավասարումների դիտարկման, որոնց լուծումներն ամբողջ կամ բնական թվեր են։ Այդպիսի հավասարումներն անվանում են դիոֆանտյան (երբեմն՝ նաև անորոշ) հավասարումներ, քանի որ այդ հավասարումներով առաջինն զբաղվել է հույն ականավոր մաթեմատիկոս Դիոֆանտ Ալեքսանդրացին (մ.թ. III դար)։

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում հանդիպում են ինչպես տիպային, այնպես էլ ոչ տիպային դիոֆանտյան հավասարումներ։ Ստորև նախ կքննարկենք որոշ տիպային դիոֆանտյան հավասարումներ, որից հետո կանդրադառնանք ոչ տիպային դիոֆանտյան հավասարումների լուծման տարրական եղանակներին։

2.1 Տիպային դիոֆանտյան հավասարումներ։

Սույն պարագրաֆում կձևակերպենք սահմանումներ և թեորեմներ, որոնք նաև կկիրառենք որոշ տիպային (դասական) անորոշ հավասարումների լուծման ընթացքում։

Գծային դիոֆանտյան հավասարումներ։

Սահմանում։ Գծային դիոֆանտյան հավասարում կոչվում է

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \qquad (1)$$

տեսքի հավասարումը, որտեղ a_1; a_2; $\ldots$; a_n; b -ն ամբողջ թվեր են:

Թեորեմ 1: (1) հավասարումը լուծելի է ամբողջ թվերի բազմությունում այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$b \vdots (a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n): \qquad (2)$$

Ըստ էության (2)-ն այն անհրաժեշտ և բավարար պայմանն է, որի բավարարման դեպքում *n* հատ անհայտներ պարունակող (1) գծային դիոֆանտյան հավասարումը լուծելի է ամբողջ թվերի բազմությունում:

Նախ դիտարկենք $n=2$ դեպքը:

Թեորեմ 2: Որպեսզի

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b \qquad (3)$$

հավասարումն ունենա ամբողջ լուծումներ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $b \vdots (a_1;a_2)$:

Թեորեմ 3: Եթե $(m_1;m_2)$ թվազույգը (3) հավասարման որևէ ամբողջ լուծում է, ապա (3) հավասարման բոլոր ամբողջ լուծումները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով՝

$$x_1 = m_1 + \frac{a_2}{d}\cdot t;\quad x_2 = m_2 - \frac{a_1}{d}\cdot t; \qquad (4)$$

որտեղ $d=(a_1;a_2)$, իսկ t-ն կամայական ամբողջ թիվ է, մասնավորապես, երբ $d=(a_1;a_2)=1$, (3) դիոֆանտյան հավասարման բոլոր ամբողջ լուծումների համար կունենանք՝ $x_1 = m_1 + a_2t;\ \ x_2 = m_2 - a_1t \quad (t \in Z)$:

Հեշտ է նկատել, որ համաձայն թեորեմ 2-ի և թեորեմ 3-ի, որպեսզի որոշենք (3) համատեղելի դիոֆանտյան հավասարման բոլոր ամբողջ լուծումները, բավական է գտնել վերջինիս որևէ մասնավոր $(m_1;m_2)$ ամբողջ լուծում:

Ստորև թվային կոնկրետ օրինակի միջոցով կնշենք (3) համատեղելի դիոֆանտյան հավասարման մասնավոր $(m_1;m_2)$ ամբողջ լուծման որոշման մեկ եղանակի մասին, որից հետո կձևակերպենք ալգորիթմ ընդհանուր դեպքում երկանհայտ դիոֆանտյան հավասարման մասնավոր ամբողջ լուծման որոշման համար:

Օրինակ 27: Գտնել $127x-52y+1=0$ հավասարման ամբողջ լուծումները:

Լուծում: Նկատենք, որ համաձայն թեորեմ 1-ի և թեորեմ 2-ի՝ տրված դիոֆանտյան հավասարումը համատեղելի է: Հավասարման անհայտների գործակիցների մոդուլներից կազմված $\frac{127}{52}$ անկանոն կոտորակը վերլուծենք շղթայական կոտորակի, կունենանք՝ $\frac{127}{52}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}$: Ստացված շղթայական կոտորակում անտեսելով վերջին $\frac{1}{5}$ -րդ կոտորակը, կունենանք՝ $2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1}}}=\frac{22}{9}$: Հեշտ է նկատել, որ $(9;22)$ թվազույգը բավարարում է ելակետային հավասարմանը, որում անհայտների գործակիցների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը հավասար է 1-ի, հետևաբար, համաձայն թեորեմ 3-ի, եյակետային հավասարման բոլոր ամբողջ լուծումները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով՝ $x = 9 - 52t;\ \ y = 22 - 127t \quad (t \in Z)$:

Պատ.՝ $x = 9 - 52t;\ \ y = 22 - 127t \quad (t \in Z)$:

Մինչ ընդհանուր դեպքում քննարկենք (3) երկանհայտ գծային դիոֆանտյան համատեղելի հավասարման մասնավոր ամբողջ լուծումների որոշման հարցերը, նախապես նշենք մի քանի կարևոր հատկություններ շղթայական կոտորակների մասին։

Թեորեմ 4: Կամայական $\dfrac{a}{b} \in Q$ ռացիոնալ թիվ, որտեղ $a \in Z$ և $b \in N$ միակ ձևով կարելի է ներկայացնել

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\cdots\cdots + \cfrac{1}{q_n + \cfrac{1}{q_{n+1}}}}}} \tag{5}$$

շղթայական կոտորակի տեսքով, որտեղ $q_0 = \left[\dfrac{a}{b}\right] \in Z$, իսկ $q_1; q_2; \ldots; q_{n+1} \in N$:

Ընդունված է (5) ներկայացումը հակիրճ գրել հետևյալ կերպ՝

$$\frac{a}{b} = \left[q_0, q_1, \ldots, q_n; q_{n+1}\right]: \tag{6}$$

Սահմանում: Կամայական (6) շղթայական կոտորակի

$\delta_k = [q_0, q_1, \ldots, q_k]$ $(k \in N_0;\ k < n+1)$ «կտրվածք» կոչվում է մերձավոր կոտորակ:

Թեորեմ 5: Կամայական մերձավոր կոտորակ բերելով ընդհանուր հայտարարի, ստացվում է անկրճատելի կոտորակ՝

$$\delta_k = [q_0, q_1, \ldots, q_k] = \frac{P_k}{Q_k}, \tag{7}$$

որի համարիչն ու հայտարարը որոշվում են հետևյալ ռեկուրենտ /անդրադարձ/ բանաձևերով՝

$$P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2}; \qquad Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}, \tag{8}$$

ուր նախնական տվյալներն են՝

$$P_0 = q_0;\ \ P_1 = q_0 q_1 + 1;\ \ Q_0 = 1;\ \ Q_1 = q_1: \tag{9}$$

Թեորեմ 6: P_k և Q_k մեծությունների համար տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝

$$P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^{k-1} \quad (k \geq 1); \tag{10}$$

$$\frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} - \frac{P_k}{Q_k} = \frac{(-1)^{k-1} q_k}{Q_k Q_{k-2}} \quad (k \geq 1): \tag{11}$$

Այժմ վերադառնանք (3) հավասարմանը: Ի նկատի ունենալով 4-6 թեորեմները՝ ընդհանուր դեպքում (3) երկանհայտ գծային դիոֆանտյան համատեղելի հավասարման $(m_1; m_2)$ մասնավոր ամբողջ լուծման որոշման համար հնարավոր են հետևյալ դեպքերը.

ա/ երբ $a_1 = a_2$ և $b \vdots (a_1; a_2)$, կստանանք՝ $b = da_1 = da_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1 + x_2 = d$, որտեղից կունենանք՝

$$m_1 = d;\ m_2 = 0, \tag{12}$$

բ/ երբ $a_1 \neq a_2$ և $b\vdots(a_1;a_2)$, կունենանք՝

$$\frac{a_1}{a_2} = \left[q_0, q_1, \ldots, q_n; q_{n+1}\right] = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$$
$$m_1 = (-1)^{n-1} bQ_{n-1} \qquad :$$
$$m_2 = (-1)^{n} bP_{n-1}$$

(13)

Այժմ վերադառնանք n հատ անհայտներ պարունակող (1) գծային դիոֆանտյան հավասարմանը։

Թեորեմ 7: Երբ (1) համատեղելի հավասարման մեջ անհայտների ամբողջ գործակիցներից որևէ մեկը, դիցուք՝ օրինակ՝ a_n-ը, հավասար է 1-ի, ապա այդ հավասարման բոլոր ամբողջ լուծումները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով՝

$$x_1 = t_1;\ x_2 = t_2;\ \cdots;\ x_{n-1} = t_{n-1};\ x_n = b - a_1t_1 - a_2t_2 - \ldots - a_{n-1}t_{n-1}\ ,$$

որտեղ $t_1;t_2;\cdots;t_{n-1} \in Z$:

Համաձայն թեորեմ 7-ի, երբ $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$ և $b\vdots(a_1;a_2;\ldots;a_n) = a$, կունենանք՝

$$ax_1 + ax_2 + \ldots + ax_n = b\,, \tag{14}$$

որտեղից կստանանք՝

$$b = da\ \left(d \in Z\right)\ \Rightarrow\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = d\ \Rightarrow\ x_1 = t_1;\ x_2 = t_2;\ \cdots;$$
$$x_{n-1} = t_{n-1};\ \ x_n = d - t_1 - t_2 - \cdots - t_{n-1}\ \ \left(t_1;t_2;\cdots;t_{n-1} \in Z\right):$$

Երբ $a_i\ \left(i = 1;\ 2;\ldots;\ n\right)$ գործակիցներից ոչ մի երկուսը միմյանց հավասար չեն, առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_n \in N: \tag{15}$$

Իրոք, երբ a_i $(i=1;\ 2;\ldots;\ n)$ գործակիցներից որևէ երկուսը միմյանց հավասար են, իսկ մնացածը՝ զույգ առ զույգ միմյանցից տարբեր, օրինակ՝ երբ $a_{n-1}=a_n$, կատարելով $y_1=x_1;\ y_2=x_2;\ \cdots;\ y_{n-2}=x_{n-2};\ y_{n-1}=x_{n-1}+x_n$ փոփոխականների փոխարինում, կունենանք $n-1$ հատ անհայտներ պարունակող $a_1y_1+a_2y_2+\ldots+a_{n-1}y_{n-1}=b$ դիոֆանտյան հավասարումը, որում անհայտների գործակիցները զույգ առ զույգ միմյանցից տարբեր են, իսկ երբ (1) հավասարման մեջ a_i $(i=1;\ 2;\ldots;\ n)$ գործակիցներից որևէ մեկը (կամ մի քանիսը) բացասական է (են), իսկ մյուսները՝ դրական, օրինակ՝ երբ $a_n<0$ և $a_i>0$ $(i=1;\ 2;\ \ldots;\ n-1)$, կատարելով $y_1=x_1;\ y_2=x_2;\ \cdots;$ $y_{n-1}=x_{n-1};\ y_n=-x_n$ փոփոխականների փոխարինում, կունենանք n հատ անհայտներ պարունակող $a_1y_1+a_2y_2+\ldots+a_{n-1}y_{n-1}+|a_n|\,y_n=b$ դիոֆանտյան հավասարումը, որում անհայտների բոլոր գործակիցները դրական ամբողջ (բնական) թվեր են:

Այսպիսով, առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ (1) հավասարման համար տեղի ունեն (15) անհավասարությունները: Այդ դեպքում ենթադրենք, որ a_1 բնական թիվը a_2 բնական թվի վրա բաժանելիս քանորդում ստացվում է k, իսկ մնացորդում՝ a_2', այսինքն՝ $a_1=ka_2+a_2';\ k\in N;\ a_2>a_2'\in N_0$: Այդ դեպքում, կատարելով $y_1=kx_1+x_2;\ y_2=x_1;\ y_3=x_3;\cdots;\ y_{n-1}=x_{n-1};\ y_n=x_n$ փոփոխականների փոխարինում և նշանակելով $a_1'=a_2$, կունենանք n հատ անհայտներ պարունակող

$$a_1' y_1 + a_2' y_2 + a_3 y_3 + \ldots + a_{n-1} y_{n-1} + a_n y_n = b \qquad (16)$$

դիոֆանտյան հավասարումը, որում անհայտների բոլոր գործակիցները բնական թվեր են և նրանցից յուրաքանչյուրը փոքր է (1) հավասարման անհայտների գործակիցներից ամենամեծից, այսինքն՝ a_1-ից:

Ակնհայտ է, որ վերոգրյալ ձևափոխությունների բազմակի կիրառման արդյունքում ելակետային (1) հավասարումից կհանգենք կամ թեորեմ 7-ում նկարագրված հավասարմանը, կամ (14), կամ (3) տիպի գծային դիոֆանտյան հավասարումներից որևէ մեկին, որոնց լուծման մասին արդեն նշել ենք: Որպես ասվածի հիմնավորում, դիտարկենք մեկ օրինակ:

Օրինակ 28: Գտնել տրված հավասարման ամբողջ լուծումները՝ $6x + 10y - 7z + 10u = 11$:

Լուծում: Փոփոխականների փոխարինման միջոցով տրված ելակետային հավասարումը բերենք միմյանցից տարբեր բնական գործակիցներով գծային դիոֆանտյան հավասարման: Նշանակելով $x_1 = y + u$; $x_2 = -z$; $x_3 = x$, կունենանք՝ $10x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 11$: Ունենք՝ $10 > 7 > 6$, $10 = 1 \cdot 7 + 3$ և $7(x_1 + x_2) + 6x_3 + 3x_1 = 11$: Նշանակելով $y_1 = x_1 + x_2$; $y_2 = x_3$; $y_3 = x_1$, կունենանք՝ $7y_1 + 6y_2 + 3y_3 = 11$: Ունենք՝ $7 > 6 > 3$, $7 = 1 \cdot 6 + 1$ և $6(y_1 + y_2) + 3y_3 + y_1 = 11$: Նշանակելով $z_1 = y_1 + y_2$; $z_2 = y_3$; $z_3 = y_1$, կունենանք՝ $6z_1 + 3z_2 + z_3 = 11$, որտեղից, ի նկատի ունենալով թեորեմ 4-

ը, կունենանք՝ $z_1 = t_1;\ \ z_2 = t_2;\ \ z_3 = 11 - 6t_1 - 3t_2$, որտեղ t_1-ը և t_2-ը կամայական ամբողջ թվեր են: Ի նկատի ունենալով վերոգրյալ փոփոխականների փոխարինումները, տարրական ձևափոխություններից հետո կստանանք՝ $x = 7t_1 + 3t_2 - 11;\quad y = t_3;\quad z = 6t_1 + 4t_2 - 11;\quad u = t_2 - t_3$, որտեղ $t_1;\ t_2;\ t_3 \in Z$:

Պատ.՝ $x = 7t_1 + 3t_2 - 11;\qquad y = t_3;\qquad z = 6t_1 + 4t_2 - 11;$ $u = t_2 - t_3\ \ \left(t_1;\ t_2;\ t_3 \in Z\right)$:

Պյութագորյան եռյակներ:

Այժմ դիտարկենք երկրորդ աստիճանի երեք փոփոխական պարունակող

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{17}$$

դիոֆանտյան հավասարումը, որի բնական լուծումների եռյակներին անվանում են պյութագորյան եռյակներ, քանզի վերջիններս կազմում են պյութագորյան ուղղանկյուն եռանկյուններ:

Հեշտ է նկատել, որ եթե u-ն և v-ն կամայական ամբողջ թվեր են, ապա $\left(u^2 - v^2;\ 2uv;\ u^2 + v^2\right)$ և $\left(2uv;\ u^2 - v^2;\ u^2 + v^2\right)$ եռյակները բավարարում են (17) հավասարմանը: Բացի այդ ակնհայտ է, որ եթե $\left(x_0;\ y_0;\ z_0\right)$-ն (17) հավասարման որևէ ամբողջ լուծում է, ապա $\left(\lambda x_0;\ \lambda y_0;\ \lambda z_0\right)$-ն ևս (17) հավասարման ամբողջ լուծում է, որտեղ λ-ն կամայական ամբողջ թիվ է:

Թեորեմ 8: (17) հավասարման բոլոր ամբողջ լուծումները որոշվում են

$$x=\lambda\left(u^2-v^2\right);\ \ y=\lambda\cdot 2uv;\ \ z=\lambda\left(u^2+v^2\right)$$

և

$$x=\lambda\cdot 2uv;\ \ y=\lambda\left(u^2-v^2\right);\ \ z=\lambda\left(u^2+v^2\right)$$

բանաձևերով, որտեղ u; v; λ-ն կամայական ամբողջ թվեր են։

Օրինակ՝ $u=2;\ v=1;\ \lambda=1$ դեպքում կունենանք $(3;4;5)$ և $(4;3;5)$ պյութագորյան եռյակները, իսկ $u=2;\ v=1;\ \lambda=2$ դեպքում՝ $(6;8;10)$ և $(8;6;10)$ պյութագորյան եռյակները։

2.2 Ոչ տիպային դիոֆանտյան հավասարումներ։

Ինչպես արդեն նշել ենք, ոչ տիպային դիոֆանտյան (անորոշ) հավասարումների պարագայում գոյություն չունեն համապիտանի ալգորիթմներ վերջիններիս լուծման համար։ Մշակված են տարբեր տարրական եղանակներ, որոնք հնարավորություն են տալիս լուծելու տարբեր ոչ տիպային դիոֆանտյան հավասարումներ, սակայն յուրաքանչյուր կոնկրետ հավասարման պարագայում այս կամ այն տարրական եղանակի ընտրությունը հավասարման տեսքից կախված նախապես կանխորոշված չէ և պահանջում է տրամաբանական և որոնողական ընդունակություններ։

Ստորև նախ համառոտ կնշենք տվյալ տարրական եղանակի էությունը, որից հետո կքննարկենք այդ եղանակին վերաբերող օրինակներ։

Արտադրիչների վերլուծման եղանակ:

Դիցուր՝ ունենք

$$F(x;y;z;\cdots)=0 \tag{18}$$

անորոշ հավասարումը, որը պետք է լուծել ամբողջ թվերի բազմությունում (կամ վերջինիս որևէ ենթաբազմությունում): Արտադրիչների վերլուծման եղանակի համաձայն՝ փորձ է արվում նույնական ձևափոխությունների միջոցով (18) հավասարումը բերել

$$f_1(x;y;z;\cdots)\cdot f_2(x;y;z;\cdots)\cdot\ldots\cdot f_k(x;y;z;\cdots)=a \tag{19}$$

կամ

$$f_1(x;y;z;\cdots)\cdot f_2(x;y;z;\cdots)\cdot\ldots\cdot f_k(x;y;z;\cdots)=a^x \tag{20}$$

տեսքի հավասարման, որտեղ $E(f_i)\subseteq Z;\ \ a\in Z$:

Եթե ստացել ենք (19) հավասարումը, ապա a ամբողջ թիվը փորձում ենք բոլոր հնարավոր եղանակներով (արտադրիչների հերթականության ճշտությամբ) ներկայացնել k հատ a_1, a_2, $\ldots, a_k$ ամբողջ թվերի արտադրյալի տեսքով: a ամբողջ թվի յուրաքանչյուր այդպիսի ներկայացման դեպքում (19) հավասարումից կհանգենք հետևյալ հավասարումների համակարգին՝

$$\begin{cases} f_1(x;y;z;\cdots)=a_1 \\ f_2(x;y;z;\cdots)=a_2 \\ \ldots \\ f_k(x;y;z;\cdots)=a_k \end{cases} :$$

Ստացված բոլոր հնարավոր այսպիսի համակարգերի լուծման արդյունքում էլ, ի վերջո, կստանանք տրված (18) հավասարման բոլոր դիոֆանտյան լուծումները:

Եթե նույնական ձևափոխությունների միջոցով (18) հավասարումից ստացել ենք (20) հավասարումը, ապա, կատարելով $x = x_1 + x_2 + \ \dots \ + x_k$ $\left(x_1;\ x_2;\ \dots;\ x_k \in Z\right)$ փոփոխականի փոխարինում, (20) հավասարումից կստանանք հետևյալ հավասարումների համակարգը՝

$$\begin{cases} x = x_1 + x_2 + \ \dots \ + x_k \\ f_1\left(x; y; z; \cdots\right) = a^{x_1} \\ f_2\left(x; y; z; \cdots\right) = a^{x_2} \\ \dots \\ f_k\left(x; y; z; \cdots\right) = a^{x_k} \end{cases},$$

որի լուծմամբ էլ, ի վերջո, կհանգենք ելակետային դիոֆանտյան հավասարման լուծմանը:

Դիտարկենք երկու օրինակ:

Օրինակ 29: Գտնել $xy = 20 - 3x + y$ հավասարման բնական լուծումները:

Լուծում: Ունենք՝ $xy = 3 - 3x + y + 17 \Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(y+3\right) = 17$: Քանի որ $17 = 1 \cdot 17 = -1 \cdot \left(-17\right)$ և ի նկատի ունենալով, որ $x - 1 \geq 0$ և $y + 3 > 0$, կունենանք հետևյալ հնարավոր դեպքերը՝ $\begin{cases} x-1=1 \\ y+3=17 \end{cases}$ կամ $\begin{cases} x-1=17 \\ y+3=1 \end{cases}$: Լուծելով այս հավասարումների համակարգերը, կստանանք՝ $x_1 = 2; y_1 = 14;\ x_2 = 18; y_2 = -2 \notin N \ \Rightarrow \ x = 2; y = 14$:

Պատ.՝ $(2;14)$։

Օրինակ 30: Գտնել $2^x+1=3^y$ հավասարման բնական լուծումները։

Լուծում: Տրված հավասարումը գրենք $2^x=3^y-1$ տեսքով և քննարկենք y-ի զույգ և կենտ լինելու դեպքերը։

Դիցուք՝ y-ը զույգ է՝ $y=2k$ $(k\in N)$, այս դեպքում տրված հավասարումից կունենանք՝ $(3^k-1)(3^k+1)=2^x$, որտեղից կստանանք՝ $3^k-1=2^{x_1}$; $3^k+1=2^{x_2}$, որտեղ $x=x_1+x_2$; $x_1\le x_2$; $x_1;x_2\in N$: Վերջին երկու հավասարումները միմյանցից հանելով, կստանանք՝ $2=2^{x_1}\cdot\left(2^{x_2-x_1}-1\right)$ կամ $2^{x_1-1}\cdot\left(2^{x_2-x_1}-1\right)=1\Rightarrow x_1=1; x_2=2\Rightarrow$ $\Rightarrow x=3;\ k=1$ և $y=2$:

Երբ y-ը կենտ է, տրված հավասարումից կունենանք՝ $2^x=3^y-1 \Rightarrow 3^{y-1}+3^{y-2}+\ldots+3+1=2^{x-1}$: Քանի որ $(y-1)$-ը զույգ է, կնշանակի՝ ստացված հավասարման ձախ մասում ունենք կենտ թվով կենտ թվերի գումար, որը կենտ է, հետևաբար այդ հավասարման աջ մասը ևս կենտ է, որտեղից կստանանք՝ $x=1\Rightarrow y=1$:

Պատ.՝ $(3;2)$; $(1;1)$։

«Գնահատման» կամ անհավասարությունների կիրառման եղանակ:

Այս եղանակի էությունը կայանում է նրանում, որ օգտվելով հայտնի, ճշմարիտ անհավասարություններից՝

փորձ է արվում գնահատել հավասարման անհայտներից որևէ մեկն ու վերջինիս համար ստանալ փոփոխման ինչ-որ [a, b] տիրույթ: Օգտվելով այն հանգամանքից, որ այդ փոփոխականը նշված տիրույթում պետք է ընդունի ամբողջ արժեքներ, վերջինիս համար ստանում ենք հնարավոր դիսկրետ արժեքների վերջավոր բազմություն, և արդյունքում մնում է առանձին-առանձին ստուգել, թե այդ դիսկրետ արժեքներից որոնք կարող են բավարարել տրված ելակետային հավասարմանը:

Դիտարկենք երկու օրինակ:

Օրինակ 31: $\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}=3$ հավասարումը լուծել ամբողջ թվերի բազմությունում:

Լուծում: Նկատենք, որ տրված հավասարման ձախ մասի երեք գումարելիներն էլ ունեն նույն նշանը և քանի որ վերջիններիս գումարը 3 է, կնշանակի այդ գումարելիներից յուրաքանչյուրը դրական է, հետևաբար դրական է նաև *xyz* արտադրյալը: Օգտվելով միջին թվաբանականի և միջին երկրաչափականի վերաբերյալ Կոշու հայտնի անհավասարությունից, կարող ենք գրել՝ $3=\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}\geq 3\sqrt[3]{\frac{xy}{z}\cdot\frac{xz}{y}\cdot\frac{yz}{x}}=3\sqrt[3]{xyz}\Rightarrow xyz\leq 1$: Այսպիսով՝ x; y; z ամբողջ թվերի համար ստացանք, որ $0<xyz\leq 1\Rightarrow$ $\Rightarrow |x|=|y|=|z|=1$: Անմիջական ստուգումով հեշտ է համոզվել, որ տրված հավասարմանը բավարարում են հետևյալ եռյակները՝ $x_1=y_1=z_1=1$; $x_2=y_2=-1; z_2=1$;

$x_3 = 1; y_3 = z_3 = -1; \quad x_4 = -1; y_4 = 1; z_4 = -1$:

Պատ.՝ $(1;1;1)$; $(-1;-1;1)$; $(1;-1;-1)$; $(-1;1;-1)$:

Օրինակ 32: Գտնել $x^3 - y^3 = xy + 61$ հավասարման բնական լուծումները:

Լուծում: Նկատենք, որ $x > y$, հետևաբար x-ի համար տեղի ունի հետևյալ ներկայացումը՝ $x = y + d \ (d \in N)$, որն էլ տեղադրելով ելակետային հավասարման մեջ, նույնական ձևափոխություններից հետո կստանանք՝ $61 = d^3 + (3d^2 - d)y + (3d-1)y^2 \geq d^3 \Rightarrow d \leq 3$: Այսպիսով, ունենք՝ $d \in N$ և $d \leq 3 \Rightarrow d_1 = 1$ կամ $d_2 = 2$ կամ $d_3 = 3$:

d-ի այս հնարավոր արժեքների համար լուծելով $61 = d^3 + (3d^2 - d)y + (3d-1)y^2$ հավասարումը, ի վերջո կստանանք՝ $d = 1; y = 5 \Rightarrow x = 6$:

Նշենք, որ այս հավասարումը կարելի է լուծել նաև արտադրիչների վերլուծման եղանակով: Այսպես, տրված հավասարման երկու մասերը բազմապատկելով 27-ով և խմբավորելով, կունենանք՝

$$(3x)^3 + (-3y)^3 + (-1)^3 + 3 \cdot (3x) \cdot (-3y) \cdot (-1) = 1646:$$

Ի նակի ունենալով

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

նույնությունը, ստացված հավասարումից կունենանք՝

$$(3x - 3y - 1)(9x^2 + 9y^2 + 1 + 9xy + 3x - 3y) = 1646:$$

Ունենք՝ $1646 = 1 \cdot 1646 = -1 \cdot (-1646) = 2 \cdot 823 = -2 \cdot (-823)$, մյուս կողմից, ի նկատի ունենալով, որ ստացված հավասարման ձախ մասի առաջին արտադրիչը փոքր է երկրորդ արտադրիչից, երկուսն էլ ընդունում են բնական արժեքներ, $3x-3y-1\equiv 2\pmod 3$ և $9x^2+9y^2+1+9xy+3x-$ $-3y\equiv 1\pmod 3$, հավանական դեպքերից հնարավոր կդառնա միայն մեկը՝

$$\begin{cases} 3x-3y-1=2 \\ 9x^2+9y^2+1+9xy+3x-3y=823 \end{cases} \Rightarrow\ x=6;\ y=5:$$

Պատ.՝ $x=6;\ y=5$:

Փոփոխականի արտաքսման եղանակ:

Այս եղանակի համաձայն՝ տրված հավասարումից արտաքսում ենք անհայտներից որևէ մեկը՝ այն արտահայտելով մյուս անհայտների միջոցով: Այնուհետև պահանջում ենք, որ արտաքսված փոփոխականն ընդունի ամբողջ արժեքներ, որի հետևանքով մյուս փոփոխականների համար ստանում ենք հնարավոր դիսկրետ արժեքների վերջավոր բազմություն, և վերջիններիս անմիջական ստուգումով էլ, ի վերջո, հանգում ենք ելակետային հավասարման դիոֆանտյան լուծումներին:

Դիտարկենք երկու օրինակ:

Օրինակ 33: $x^2(1+y)=2x^4-y+2$ հավասարումը լուծել ամբողջ թվերի բազմությունում:

Լուծում: Տրված հավասարումից արտաքսելով y-ը, կստանանք՝ $y=\dfrac{2x^4-x^2+2}{x^2+1}=2x^2-3+\dfrac{5}{x^2+1}\in Z\quad\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \frac{5}{x^2+1} \in Z \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x^2+1=\pm 1 \\ x^2+1=\pm 5 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=6 \end{array}\right. \quad \Rightarrow$$

$x_1=0; y_1=2;\ \ x_2=2; y_2=6;\ \ x_3=-2; y_3=6$

Պատ.՝ $(0;2);(2;6);(-2;6)$։

Օրինակ 34։ $x^2+3y^2=6+2xy$ հավասարումը լուծել բնական թվերով։

Լուծում։ Տրված հավասարումը գրենք հետևյալ տեսքով՝ $x^2-2y\cdot x+\left(3y^2-6\right)=0$ և այն դիտարկենք որպես քառակուսի հավասարում x-ի նկատմամբ։ Որպեսզի այն ունենա բնական լուծումներ, անհրաժեշտ է, որ վերջինիս դիսկրիմինանտը լինի ոչ բացասական, այսինքն՝ $D/4=6-2y^2\geq 0 \ \Rightarrow \ y^2\leq 3$, որտեղից էլ, ի նկատի ունենալով, որ $y\in N$, կստանանք՝ $y=1 \ \Rightarrow \ x=3$։

Պատ.՝ $(3;1)$։

Նշենք, որ օրինակ 29-ում բերված անորոշ հավասարումը ևս կարելի է լուծել փոփոխականի արտաքսման եղանակով։ Ստորև ներկայացնենք այն։

Օրինակ 35։ Գտնել $xy=20-3x+y$ հավասարման բնական լուծումները։

Լուծում։ Տրված հավասարումից արտաքսելով x փոփոխականը, կստանանք՝ $xy=20-3x+y\Rightarrow x=\dfrac{y+20}{y+3}=$

$$=1+\frac{17}{y+3}\in N\Rightarrow \frac{17}{y+3}\in N\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y+3=1 \\ y+3=17 \end{array}\right.\Rightarrow y=14\Rightarrow x=2:$$

Պատ.՝ $(2;14)$։

Բաղդատումների եղանակ:

Այս եղանակի համաձայն՝ դիտարկվում են տրված անորոշ հավասարման երկու մասերը որևէ բնական թվի վրա բաժանելիս ստացվող հնարավոր մնացորդները, որի արդյունքում հավասարման փոփոխականների համար ստացվում են սահմանափակումներ, որոնց օգնությամբ լուծում են տրված անորոշ հավասարումը (կամ ապացուցում, որ վերջինս չունի ամբողջ լուծումներ):

Օրինակ 36: Գտնել $x^4+y^4+1=10^{2024z}$ հավասարման դիոֆանտյան (ամբողջ) լուծումները:

Լուծում: Ունենք՝ $10^{2024z}=x^4+y^4+1\geq 1 \;\Rightarrow\; z\geq 0$: Քննարկենք ելակետային հավասարման ձախ մասը 4-ի բաժանելիս ստացվող հնարավոր մնացորդները: Ի նկատի ունենալով, որ ամբողջ թվի չորրորդ աստիճանը 4-ի բաժանելիս կարող է տալ 0 կամ 1 մնացորդ, կունենանք՝ $x^4+y^4+1 \equiv 1;\; 2$ կամ $3 \pmod 4 \;\Rightarrow\; x^4+y^4+1 \not\vdots\, 4$:

Փաստորեն տրված հավասարման ձախ մասը չի բաժանվում 4-ի, հետևաբար աջ մասը ևս չպետք է բաժանվի 4-ի, այսինքն՝ $10^{2024z} \not\vdots\, 4 \;\Rightarrow\; z<1$: Այսպիսով, ստացանք՝ $0\leq z<1 \;(z\in Z) \Rightarrow z=0 \Rightarrow x^4+y^4=0 \Rightarrow x=y=0$:

Պատ.՝ $(0;0;0)$:

Օրինակ 37: Գտնել $19x^2+28y^2=729$ հավասարման ամբողջ լուծումները:

Լուծում: I եղանակ: Հեշտ է նկատել, որ $x\neq 0$ և $y\neq 0$: Քանի որ տրված հավասարման աջ մասը բաժանվում է 9-

ի, ուրեմն, ձախ մասը ևս պետք է բաժանվի 9-ի, որտեղից, ի նկատի ունենալով, որ ամբողջ թվի քառակուսին 9-ի բաժանելիս կարող է տալ 0; 1; 4 կամ 7 մնացորդ, կունենանք՝ $19x^2+28y^2=19\left(x^2+y^2\right)+9y^2 \vdots 9 \Rightarrow \left(x^2+y^2\right) \vdots 9 \Rightarrow$ $x \vdots 9$ և $y \vdots 9$ $\Rightarrow$ $x=9m;\ y=9n\ \left(m;n\in Z/\{0\}\right)$ $\Rightarrow$ $9=19m^2+28n^2\geq 19+28 \Rightarrow m;n\in\varnothing \Rightarrow x;y\in\varnothing$:

II եղանակ: Հեշտ է նկատել, որ $x\neq 0$ և $y\neq 0$: Քանի որ տրված հավասարման աջ մասը բաժանվում է 3-ի, ուրեմն, ձախ մասը ևս պետք է բաժանվի 3-ի, որտեղից, ի նկատի ունենալով, որ ամբողջ թվի քառակուսին 3-ի բաժանելիս կարող է տալ 0 կամ 1 մնացորդ, կունենանք՝ $19x^2+28y^2=19\left(x^2+y^2\right)+9y^2 \vdots 3 \Rightarrow \left(x^2+y^2\right)\vdots 3 \Rightarrow x=3m;$ $y=3n\ \left(m;n\in Z\right) \Rightarrow 19m^2+28n^2=81 \Rightarrow 0\leq 19m^2=81-$ $-28n^2 \Rightarrow n^2<3 \Rightarrow n^2=0$ կամ $n^2=1 \Rightarrow 19m^2=81$ կամ $19m^2=53 \Rightarrow \varnothing$:

Պատ.՝ $\varnothing$:

Պարամետրական եղանակ:

Այս եղանակի համաձայն՝ տրված $F\left(x;y;z;\cdots\right)=0$ անորոշ հավասարման համար պետք է գտնել նոր $u;v;\ldots$ փոփոխականներից կազմված և ամբողջ արժեքներ ընդունող այնպիսի $\alpha(u;v;\ldots)$; $\beta(u;v;\ldots)$; $\gamma(u;v;\ldots);\ldots$ ֆունկցիաներ, որ $x=\alpha(u;v;\ldots)$; $y=\beta(u;v;\ldots)$; $z=\gamma(u;v;\ldots)$; … դեպքում տեղի ունենա հետևյալ նույնությունը՝ $F\left(\alpha(u;v;\ldots);\beta(u;v;\ldots);\gamma(u;v;\ldots);\ \ldots\right)\equiv 0$ ։ Եթե հաջողվում է գտնել այդպիսի ֆունկցիաներ, ապա, ըստ էության ապացուցվում է նաև, որ տրված $F(x;y;z;\cdots)=0$ դիոֆանտյան հավասարումն ունի անվերջ թվով լուծումներ։

Օրինակ 38: Հավասարումը լուծել N -ում՝ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$ ։

Լուծում: Ունենք՝ $z(x+y)=xy$, որտեղից՝ $z=xy/(x+y)$ ։

x և y բնական թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը նշանակենք d -ով՝ $d=(x;y)$, ուրեմն, $x=md$; $y=nd$ $(m;n\in N)$ և $(m;n)=1$, հետևաբար կունենանք՝ $z\in N$ և $z=dmn/(m+n)\in N$ ։ Քանի որ $(m;n)=1\Rightarrow$ $(m+n;mn)=1$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow d\,\vdots\,(m+n)$ $\Rightarrow d=k(m+n)$, որտեղ $k\in N$ ։ Այսպիսով, ստացանք՝ $x=md=mk(m+n);\ y=nd=nk(m+n)$ և $z=dmn/(m+n)=kmn$ ։

Պատ.՝ $x=mk(m+n);\ y=nk(m+n)$; $z=kmn$, որտեղ k -ն, m -ը և n -ը կամայական բնական թվեր են։

Օրինակ 39: Ապացուցել, որ $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=2016$ հավասարումն ունի անվերջ թվով ամբողջ լուծումներ։

Լուծում: Հեշտ է նկատել, որ եթե $(x_0;y_0;z_0)$ -ն տրված հավասարման լուծում է, ապա կամայական $a\in Z$ պարամետրի դեպքում $(x_0+a;\ y_0+a;\ z_0+a)$ -ն ևս կհանդիսանա վերջինիս լուծում։ Եվ, ուրեմն, ապացուցելու համար, որ տրված հավասարումն ունի անվերջ թվով լուծումներ, բավական է ցույց տալ, որ այն ունի գոնե մեկ ամբողջ լուծում: Ի նկատի ունենալով

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x)$$

նույնությունը, տրված հավասարումից կստանանք՝

$$(x-y)(y-z)(z-x)=672:$$

Նկատենք, որ $(x-y)+(y-z)+(z-x)=0$; $672=(-6)\cdot(-8)\cdot 14$ և $(-6)+(-8)+14=0$, հետևաբար $(x-y)(y-z)(z-x)=672$ հավասարման մասնավոր լուծումը կարող ենք փնտրել հետևյալ տեսքով՝ $x_0-y_0=-6;\ y_0-z_0=-8$ և $z_0-x_0=14$, որտեղից կստանանք՝ $x_0=0;\ y_0=6;\ z_0=14$: Եվ ուրեմն, համաձայն վերոգրյալի, տրված հավասարումը կունենա հետևյալ ամբողջ լուծումները՝ $x=a;\ y=6+a;\ z=14+a$, որտեղ a -ն կամայական ամբողջ պարամետր է:

«Անվերջ վայրէջքի» եղանակ:

Դիցուք՝ $P(n)$ -ը n բնական թվից կախված որևէ պնդում է և $P(1)$-ը կեղծ է: «Անվերջ վայրէջքի» եղանակի և/կամ մեթոդի էությունը կայանում է հետևյալում. եթե յուրաքանչյուր n_0 բնական թվի դեպքում $P(n_0)$-ի ճշմարիտ լինելուց հետևում է, որ գոյություն ունի $n_1<n_0$ բնական թիվ, այնպիսին, որ $P(n_1)$-ը ևս ճշմարիտ է, ուրեմն՝ $P(n)$ պնդումը կեղծ է կամայական n բնական թվի դեպքում

(քանզի հակառակ պարագայում կստացվեր, որ գոյություն ունեն n_0 -ից փոքր անվերջ թվով $n_0 > n_1 > n_2 > \cdots$ բնական թվեր, այնպիսիք, որ դրանցից յուրաքանչյուրի համար $P(n)$ պնդումն իրավացի է, մինչդեռ կամայական n_0 բնական թվի համար դրանից փոքր բնական թվերի քանակը վերջավոր է):

Փաստորեն, եթե որևէ $P(n)$ $(n \in N)$ պնդման համար կիրառելի է «անվերջ վայրէջքի» եղանակը, ապա $P(n)$ պնդումը կեղծ է բոլոր բնական n-երի համար: Համանման ձևով ըստ էության կարող ենք փաստել, որ եթե որևէ դիոֆանտյան հավասարման համար կիրառելի է «անվերջ վայրէջքի» եղանակը, ապա այդ հավասարումը չունի ոչ զրոյական բնական լուծումներ:

Օրինակ 40: Գտնել $x^4 + y^4 = 4z^4$ հավասարման ամբողջ լուծումները:

Լուծում: Հեշտ է նկատել, որ եթե $x; y; z$ փոփոխականներից որևէ մեկը հավասար է զրոյի, ապա մյուս երկուսը ևս հավասար են զրոյի և, ուրեմն, տրված հավասարումն ունի զրոյական լուծում:

Այժմ ենթադրենք, որ $x \cdot y \cdot z \neq 0$: Դիցուք տրված հավասարումն ունի $(x_0; y_0; z_0)$ ոչ զրոյական ամբողջ լուծում, այսինքն՝ $x_0^4 + y_0^4 = 4z_0^4$: Ի նկատի ունենալով, որ ամբողջ թվի չորրորդ աստիճանը 4-ի բաժանելիս կարող է տալ 0 կամ 1 մնացորդ, կունենանք՝ $x_0 = 2x_1$; $y_0 = 2y_1$ $(x_1; y_1 \in Z)$ $\Rightarrow$ $z_0 = 2z_1$ $(z_1 \in Z)$ $\Rightarrow$ $x_1^4 + y_1^4 = 4z_1^4$:

Այսպիսով՝ ստացանք տրված հավասարման նոր լուծում՝ $(x_1; y_1; z_1)$, ընդ որում $|x_1|<|x_0|$; $|y_1|<|y_0|$; $|z_1|<|z_0|$: Մյուս կողմից հեշտ է նկատել, որ $z=1$ դեպքում տրված հավասարումը լուծում չունի, հետևաբար, համաձայն «անվերջ վայրէջքի» մեթոդի (երբ որպես $P(z)$ պնդում դիտարկում ենք տրված հավասարման բնական լուծում ունենալը), տրված հավասարումը չունի բնական (և, ուրեմն, նաև ոչ զրոյական ամբողջ) լուծումներ:

Պատ.՝ $(0;0;0)$:

Օրինակ 41: $x^3+3y^3+9z^3=2025xyz$ հավասարումը լուծել N_0-ում:

Լուծում: Հեշտ է նկատել, որ եթե $x;y;z$ փոփոխականներից որևէ մեկը հավասար է զրոյի, ապա մյուս երկուսը ևս հավասար են զրոյի և, ուրեմն, տրված հավասարումն ունի զրոյական լուծում:

Այժմ ենթադրենք, որ $x\cdot y\cdot z\neq 0$: Դիցուք՝ տրված հավասարումն ունի $(x_1; y_1; z_1)$ բնական լուծում, այսինքն՝ $x_1^3+3y_1^3+9z_1^3=2025x_1y_1z_1$: Նկատենք, որ

$$x_1^3=2022x_1y_1z_1-3y_1^3-9z_1^3 \,\vdots\, 3 \Rightarrow x_1=3x_2 \ (x_2\in N)\Rightarrow$$

$$y_1^3=2022x_2y_1z_1-3z_1^3-9x_2^3 \,\vdots\, 3 \Rightarrow y_1=3y_2\,(y_2\in N)\Rightarrow$$

$$z_1^3=2022x_2y_2z_1-3x_2^3-9y_2^3 \,\vdots\, 3 \Rightarrow z_1=3z_2\,(z_2\in N)\Rightarrow$$

$x_2^3+3y_2^3+9z_2^3=2025x_2y_2z_2$: Այսպիսով՝ ստացանք տրված հավասարման նոր լուծում՝ $(x_2; y_2; z_2)$, ընդ որում $x_1>x_2$; $y_1>y_2$; $z_1>z_2$: Մյուս կողմից հեշտ է նկատել, որ

$x=1$ դեպքում տրված հավասարումը լուծում չունի, քանի որ այդ դեպքում հավասարման աջ մասը կբաժանվի 3-ի, իսկ ձախը՝ ոչ, հետևաբար, համաձայն «անվերջ վայրէջքի» մեթոդի (երբ որպես $P(x)$ պնդում դիտարկում ենք տրված հավասարման բնական լուծում ունենալը), տրված հավասարումը չունի բնական լուծումներ:

Պատ.՝ $(0;0;0)$:

Վերջում հավելենք, որ հայտնի է նաև «վերջավոր վայրէջքի» եղանակը և/կամ մեթոդը, որը բովանդակությամբ կարծես «կրկնում» է «անվերջ վայրէջքի» մեթոդը և նման է լրիվ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդին:

Այսպես. դիցուք՝ $P(n)$-ը n բնական թվից կախված որևէ պնդում է և գոյություն ունի ինչ-որ k բնական թիվ, որի համար $P(k)$-ն կեղծ է: «Վերջավոր վայրէջքի» եղանակի և/կամ մեթոդի էությունը կայանում է հետևյալում. եթե յուրաքանչյուր $n_0>k$ բնական թվի դեպքում $P(n_0)$-ի ճշմարիտ լինելուց հետևում է, որ գոյություն ունի n_1 բնական թիվ, այնպիսին, որ $n_0>n_1\geq k$ և $P(n_1)$-ը ևս ճշմարիտ է, ուրեմն, $P(n)$ պնդումը կեղծ է կամայական $n\geq k$ բնական թվի դեպքում: Այս դեպքում մնում է պարզել $P(n)$ պնդման ճշմարտացիությունը $1\leq n<k$ վերջավոր բնական արժեքների համար:

§3. Վերջավոր գումարներ։

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում բավական խորությամբ ուսումնասիրվում է «Պրոգրեսիա» թեման, որի շրջանակում քննարկվում և արտածվում են նաև թվաբանական և երկրաչափական պրոգրեսիաների վերջավոր թվով հաջորդական անդամների գումարների հաշվման բանաձևերը։ Սակայն տարբեր խնդրագրքերում առաջարկվում է հաշվել

$$S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \tag{21}$$

վերջավոր գումարներ, որոնց անդամները թվաբանական կամ երկրաչափական պրոգրեսիաների հաջորդական անդամներ չեն ։

Ստորև կառանձնացնենք մի քանի տարրական եղանակներ, որոնք հնարավորություն կտան հաշվելու այդպիսի վերջավոր գումարներ։

Նույնական ձևափոխությունների եղանակ։

Երբեմն հանդիպում են վերջավոր գումարներ, որոնք նույնական ձևափոխությունների միջոցով հնարավոր է բերել թվաբանական կամ երկրաչափական պրոգրեսիաների վերջավոր թվով հաջորդական անդամների գումարի։

Դիտարկենք մի քանի օրինակներ։

Օրինակ 42: Հաշվել $S_n = 6 + 66 + 666 + \cdots + \underbrace{66\ldots6}_{n \text{ հատ}}$ գումարը։

Լուծում: Ունենք՝

$$S_n = 6+66+666+\cdots+\underbrace{66\ldots6}_{n \text{ հատ}} = \frac{2}{3}\cdot\Big(9+99+999+\cdots+\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ հատ}}\Big)=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\left[(10-1)+\left(10^2-1\right)+\left(10^3-1\right)+\cdots+\left(10^n-1\right)\right]=\frac{2}{3}\cdot\Big[10+10^2+$$

$$+10^3+\cdots+10^n-n\Big]=\frac{2}{3}\cdot\left[\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right]:$$

Պատ.՝ $S_n=\frac{2}{3}\cdot\left[\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right]$:

Օրինակ 43: Հաշվել $S_n = x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n$ $(n\in N; x\in R)$ գումարը:

Լուծում: Երբ $x=1$, ունենք՝ $S_n = 1+2+3+\cdots+n = =\frac{n(n+1)}{2}$, իսկ երբ $x\neq1$, նկատենք, որ $S_n - x\cdot S_n =$

$$=\left(x+x^2+\cdots+x^n\right)-n\cdot x^{n+1}=\frac{x\left(x^n-1\right)}{x-1}-n\cdot x^{n+1},$$ որտեղից կստանանք՝ $S_n=\frac{x\cdot\left(nx^{n+1}-(n+1)x^n+1\right)}{(x-1)^2}$:

Պատ.՝ $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$, երբ $x=1$ և

$$S_n=\frac{x\cdot\left(nx^{n+1}-(n+1)x^n+1\right)}{(x-1)^2},$$ երբ $x\neq1$:

Օրինակ 44: Հաշվել $S_n = 1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+ +(-1)^{n+1}\cdot n^2$ գումարը:

Լուծում: Երբ n-ը կենտ է, այսինքն երբ $n=2k+1$ $(k\in N_0)$, ունենք՝

$$S_n \equiv S_{2k+1} = 1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots - (2k)^2 + (2k+1)^2 = 1^2 + \left[3^2 - 2^2\right] +$$
$$+ \left[5^2 - 4^2\right] + \cdots + \left[(2k+1)^2 - (2k)^2\right] = 1 + 5 + 9 + \cdots + (4k+1) =$$
$$= \frac{(1+4k+1)(k+1)}{2} = (2k+1)(k+1) = \frac{n(n+1)}{2} :$$

Երբ n -ը զույգ է, այսինքն՝ երբ $n = 2k$ $(k \in N)$, ունենք՝ $S_n \equiv S_{2k} = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2k-1)^2 - (2k)^2 =$

$$= -\left(\left[2^2 - 1^2\right] + \left[4^2 - 3^2\right] + \cdots + \left[(2k)^2 - (2k-1)^2\right]\right) =$$
$$= -\left(3 + 7 + 11 + \cdots + (4k-1)\right) = -\frac{(3+4k-1)k}{2} = -\frac{n(n+1)}{2} :$$

Այսպիսով՝ $S_n = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{n(n+1)}{2}$:

Պատ.՝ $S_n = (-1)^{n+1} \cdot n(n+1)/2$:

Տարբերությունների եղանակ:

Այս եղանակի համաձայն՝ փորձ է արվում գտնել այնպիսի $f(x)$ ֆունկցիա, որ (21) գումարի յուրաքանչյուր α_k $\left(k = \overline{1;n}\right)$ գումարելու համար տեղի ունենա

$$\alpha_k = f(k+1) - f(k) \qquad (22)$$

կամ

$$\alpha_k = f(k) - f(k+1) \qquad (23)$$

ներկայացումը: Եթե հաջողվում է գտնել այդպիսի $f(x)$ ֆունկցիա, ապա (21) գումարի համար (22) ներկայացման դեպքում կստանանք՝

$$S_n = \left[f(2) - f(1) \right] + \left[f(3) - f(2) \right] + \cdots + \left[f(n+1) - f(n) \right] = f(n+1) - f(1) \ , \tag{24}$$

իսկ (23) ներկայացման դեպքում՝

$$S_n = \left[f(1) - f(2) \right] + \left[f(2) - f(3) \right] + \cdots + \left[f(n) - f(n+1) \right] = f(1) - f(n+1) : \tag{25}$$

Դիտարկենք մի քանի օրինակներ:

Օրինակ 45: Հաշվել $S_n = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ $(n \in N; x \in R)$ գումարը:

Լուծում: Նկատենք, որ $\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = f(k+1) - f(k)$, որտեղ $f(x) = \sqrt{x}$, այսինքն՝ տեղի ունի (22) ներկայացումը, հետևաբար, համաձայն (24)-ի, կունենանք՝ $S_n = f(n+1) - f(1) = \sqrt{n+1} - 1$:

Պատ.՝ $S_n = \sqrt{n+1} - 1$:

Օրինակ 46: Հաշվել $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$ գումարը:

Լուծում: Հեշտ է նկատել, որ $\alpha_k = \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = f(k) - f(k+1)$, որտեղ $f(x) = \frac{1}{x}$, այսինքն՝ տեղի ունի (23) ներկայացումը, հետևաբար, համաձայն (25)-ի, կունենանք՝ $S_n = f(1) - f(n+1) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ ։

Պատ.՝ $S_n = \frac{n}{n+1}$ ։

Նշենք, որ այս օրինակը կարելի է ընդհանրացնել և դիտարկել $S_n = \frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}$ գումարը, որում $\{a_n\}$-ը d տարբերությամբ թվաբանական պրոգրեսիա է։ Համանման մոտեցման արդյունքում S_n գումարի համար կստանանք՝ $S_n = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) = \frac{n}{a_1 \cdot a_{n+1}}$ ։ Բերված օրինակ 46-ում $a_1 = 1$; $d = 1$ ։

Օրինակ 47: Հաշվել $S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n!$ գումարը։

Լուծում: Նկատենք, որ $\alpha_k = (k+1-1) \cdot k! = (k+1)! - k! = f(k+1) - f(k)$, որտեղ $f(k) = k!$ $(k \in N)$, այսինքն՝ տեղի ունի (22) ներկայացումը, հետևաբար, համաձայն (24)-ի, կունենանք՝ $S_n = f(n+1) - f(1) = (n+1)! - 1$։

Պատ.՝ $S_n = (n+1)! - 1$ ։

Օրինակ 48: Հաշվել $S_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}$ գումարը։

Լուծում: Հեշտ է նկատել, որ $\alpha_k = \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = f(k) - f(k+1)$, որտեղ $f(k) = \frac{1}{k!}$ $(k \in N)$, այսինքն՝ տեղի ունի (23) ներկայացումը, հետևաբար, համաձայն (25)-ի, կունենանք՝ $S_n = f(1) - f(n+1) = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$:

Պատ.՝ $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$:

Օրինակ 49: Հաշվել $S_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 5 + 3\cdot 8 + \cdots + n\cdot(3n-1)$ գումարը:

Լուծում: Ունենք՝ $\alpha_k = 3k^2 - k$: Համաձայն (22)-ի՝ $f(x)$ ֆունկցիան փնտրենք հետևյալ տեսքով՝ $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx$:

Ունենք՝ $\alpha_k = k\cdot(3k-1) = f(k+1) - f(k)$, որտեղից կունենանք՝ $3k^2 - k = 3k^2 + (2A+3)\cdot k + (A+B+1)$, հետևաբար $2A+3 = -1;\ A+B+1 = 0 \Rightarrow A = -2;\ B = 1 \Rightarrow f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ և, ուրեմն, համաձայն (24)-ի, կունենանք՝ $S_n = f(n+1) - f(1) = (n+1)^3 - 2(n+1)^2 + (n+1) - (1 - 2 + 1) = n^3 + n^2$:

Պատ.՝ $S_n = n^3 + n^2$:

Նշենք, որ այսպիսի մոտեցում կարելի է կիրառել բոլոր այն (21) գումարներում, որոնց անդամներն իրենցից ներկայացնում են երկու կամայական թվաբանական պրոգրեսիաների համապատասխան անդամների արտադրյալ, այսինքն՝

$$\alpha_k = (a_1 + (k-1)d)(a_1' + (k-1)d') \quad (1 \le k \le n) : \qquad (26)$$

Համանման մոտեցման դեպքում, դիտարկելով $f(x)=x^{3}+Ax^{2}+Bx$ ֆունկցիան, որում ընտրելով

$$A=\frac{3}{2dd'}\cdot\left(d\cdot\left(a_1'-d'\right)+d'\cdot\left(a_1-d\right)-dd'\right)$$

և

$$B=\frac{3(a_1-d)(a_1'-d')}{dd'}-A-1,$$

վերջնարդյունքում կստանանք՝

$$S_n=\frac{dd'}{3}\cdot\left(f(n+1)-f(1)\right): \qquad (27)$$

Բերված օրինակ 49-ում $a_1=1;\ d=1;\ a_1'=2;\ d'=3$:

Նույնությունների գումարման և խմբավորման եղանակ:

Երբեմն կրճատ բազմապատկման, թվաբանական և երկրաչափական պրոգրեսիաների վերջավոր թվով հաջորդական անդամների գումարների հաշվման բանաձևերի (ըստ էության՝ նույնությունների) գումարման և խմբավորման միջոցով հնարավոր է լինում հաշվել տարբեր վերջավոր գումարներ: Այս համատեքստում դիտարկենք երկու օրինակ:

Օրինակ 50: Հաշվել $S_n=1^2+2^2+\cdots+n^2$ գումարը:

Լուծում: Հեշտ է նկատել, որ տրված գումարի յուրաքանչյուր անդամ իրենից ներկայացնում է երկու $a_1=1;\ d=1;\ a_1'=1;\ d'=1$ թվաբանական պրոգրեսիաների համապատասխան անդամների արտադրյալ, հետևաբար, համաձայն (26)-ի և (27)-ի՝ տրված գումարի համար կստանանք՝ $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ։

Ստորև տրված գումարի հաշվման համար կիրառենք այլ մոտեցում: Ունենք՝

$$2^3 = (1+1)^3 = 1^3 + 3\cdot 1^2 \cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 1^2 + 1^3 \ ;$$

$$3^3 = (2+1)^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2 \cdot 1 + 3\cdot 2\cdot 1^2 + 1^3 \ ;$$

$$4^3 = (3+1)^3 = 3^3 + 3\cdot 3^2 \cdot 1 + 3\cdot 3\cdot 1^2 + 1^3 \ ;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n^3 = (n-1+1)^3 = (n-1)^3 + 3\cdot (n-1)^2 \cdot 1 + 3\cdot (n-1)\cdot 1^2 + 1^3$$

$$(n+1)^3 = n^3 + 3\cdot n^2 \cdot 1 + 3\cdot n\cdot 1^2 + 1^3 \ :$$

Ստացված հավասարությունները գումարելով և խմբավորելով կստանանք՝

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3\cdot\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) + 3\cdot(1 + 2 + \cdots + n) + n\cdot 1^3 \ ,$$

որտեղից որոնելի գումարի համար կունենանք՝

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{3}\cdot\left((n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - (n+1)\right) =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ :$$

Պատ.՝ $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ։

Այժմ օրինակ 43-ում դիտարկված վերջավոր գումարի հաշվման համար կիրառենք այլ մոտեցում:

Օրինակ 51: Հաշվել $S_n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n$ $(n \in N; x \in R)$ գումարը:

Լուծում: Երբ $x=1$, ունենք՝ $S_n=1+2+3+\cdots+n=$ $=\frac{n(n+1)}{2}$, իսկ երբ $x\neq 1$, դիտարկենք x հայտարարով երկրաչափական պրոգրեսիաների վերջավոր թվով հաջորդական անդամների հետևյալ գումարները.

$$x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}+x^n=\frac{x\left(x^n-1\right)}{x-1}=\frac{x^{n+1}}{x-1}-\frac{x}{x-1};$$

$$x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}+x^n=\frac{x^2\left(x^{n-1}-1\right)}{x-1}=\frac{x^{n+1}}{x-1}-\frac{x^2}{x-1};$$

$$x^3+\cdots+x^{n-1}+x^n=\frac{x^3\left(x^{n-2}-1\right)}{x-1}=\frac{x^{n+1}}{x-1}-\frac{x^3}{x-1};$$

....

$$x^{n-1}+x^n=\frac{x^{n-1}\left(x^2-1\right)}{x-1}=\frac{x^{n+1}}{x-1}-\frac{x^{n-1}}{x-1};$$

$$x^n=\frac{x^n\left(x-1\right)}{x-1}=\frac{x^{n+1}}{x-1}-\frac{x^n}{x-1}:$$

Գումարելով և խմբավորելով այս նույնությունները, կստանանք՝ $S_n=x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n=$

$$=\frac{nx^{n+1}}{x-1}-\frac{1}{x-1}\cdot\left(x+x^2+\cdots+x^n\right)=\frac{x\cdot\left(nx^{n+1}-(n+1)x^n+1\right)}{(x-1)^2}:$$

Պատ.՝ $S_n=\frac{x\cdot\left(nx^{n+1}-(n+1)x^n+1\right)}{(x-1)^2}$, երբ $x\neq 1$ և

$S_n=\frac{n(n+1)}{2}$, երբ $x=1$:

Նշենք, որ այսպիսի մոտեցում կարելի է կիրառել բոլոր այն (21) գումարներում, որոնց անդամներն իրենցից ներկայացնում են կամայական թվաբանական և երկրաչափական պրոգրեսիաների համապատասխան անդամների արտադրյալ, այսինքն՝

$$\alpha_k = \left(a_1 + (k-1)d\right)\cdot b_1 \cdot q^{k-1} \quad (1 \le k \le n):$$

Դիտարկենք հետևյալ գումարները (նույնությունները)՝

$$a_1 b_1\left(1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-2}+q^{n-1}\right)=\frac{a_1 b_1\left(q^n-1\right)}{q-1};$$

$$db_1\left(q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-2}+q^{n-1}\right)=\frac{db_1 q\left(q^{n-1}-1\right)}{q-1};$$

$$db_1\left(q^2+q^3+\cdots+q^{n-2}+q^{n-1}\right)=\frac{db_1 q^2\left(q^{n-2}-1\right)}{q-1};$$

....

$$db_1\left(q^{n-2}+q^{n-1}\right)=\frac{db_1 q^{n-2}\left(q^2-1\right)}{q-1};$$

$$db_1 q^{n-1}=\frac{db_1 q^{n-1}\left(q-1\right)}{q-1}:$$

Համանման մոտեցման արդյունքում, գումարելով և խմբավորելով այս նույնությունները, արդյունքում կստանանք՝

$$S_n = a_1\left(\frac{b_1 q^n - b_1}{q-1}\right)+d\left(\frac{(n-1)b_1 q^n}{q-1}-\frac{b_1 q\left(q^{n-1}-1\right)}{(q-1)^2}\right):$$

Բերված օրինակ 51-ում $a_1 = 1; \quad d = 1; \quad b_1 = x; \quad q = x:$

§4. Իրական թվի ամբողջ կամ կոտորակային մաս պարունակող հավասարումներ և անհավասարումներ։

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում չեն դիտարկվում իրական թվի ամբողջ և կոտորակային մաս պարունակող հավասարումներ և անհավասարումներ, մինչդեռ վերջիններիս «հանդիպում» ենք տարբեր խնդրագրքերում։

Ստորև կնշենք իրական թվի ամբողջ կամ կոտորակային մաս պարունակող, ընդհանուր տեսքով տրված որոշակի տիպային հավասարումների և անհավասարումների լուծման եղանակների էությունը, ինչը հնարավորություն կտա իրական թվի ամբողջ կամ կոտորակային մաս պարունակող տարբեր տիպային և ոչ տիպային հավասարումներում և անհավասարումներում «ազատվել» այդ ամբողջ կամ կոտորակային մասերից և խնդիրը հանգեցնել հայտնի տիպային (գծային, քառակուսային, կոտորակառացիոնալ և այլն) հավասարման կամ անհավասարման լուծման։

Նախապես նշենք իրական թվի ամբողջ և կոտորակային մասերի սահմանումները և այդ սահմանումներից անմիջականորեն բխող մի քանի հատկություններ։

Սահմանում 1։ a իրական թիվը չգերազանցող ամենամեծ ամբողջ թիվը կոչվում է a իրական թվի ամբողջ մաս և նշանակվում հետևյալ կերպ՝ $[a]$։

Սահմանում 2: $a-[a]$ տարբերությունը կոչվում է a իրական թվի կոտորակային մաս և նշանակվում հետևյալ կերպ՝ $\{a\}$, այսինքն՝ $\{a\}=a-[a]$:

Վերոգրյալ սահմանումներից անմիջականորեն բխում են հետևյալ կարևոր հատկությունները, որոնցում a-ն կամայական իրական թիվ է $(a\in R)$, իսկ n-ը՝ կամայական ամբողջ թիվ $(n\in Z)$.

$$[a]\le a<[a]+1, \tag{28}$$

$$a-1<[a]\le a, \tag{29}$$

$$0\le\{a\}<1, \tag{30}$$

$$[a+n]=[a]+n, \tag{31}$$

$$\{a+n\}=\{a\}: \tag{32}$$

Այժմ քննարկենք իրական թվի ամբողջ կամ կոտորակային մաս պարունակող, ընդհանուր տեսքով տրված մի քանի տիպային հավասարումներ և անհավասարումներ, որոնցում a-ն և α-ն կամայական իրական թվեր են $(a;\alpha\in R)$:

Դիտարկենք $[f(x)]=a$ հավասարումը:

Նկատենք, որ հավասարման ԹԱԲ-ում ձախ մասը միշտ ընդունում է ամբողջ արժեքներ, հետևաբար ոչ ամբողջ a-երի դեպքում տրված հավասարումը լուծում չի ունենա, իսկ ամբողջ a-երի դեպքում, ի նկատի ունենալով սահմանում 1-ը և $(28)-(29)$ հատկությունները, կունենանք՝ $a \le f(x) < a+1$ ։ Այսպիսով, դիտարկվող հավասարման համար ստացանք՝

$$\left[f(x)\right] = a \Leftrightarrow \begin{cases} a \in Z \;\Rightarrow\; a \le f(x) < a+1 \\ a \in R \setminus Z \;\Rightarrow\; x \in \varnothing \end{cases} : \qquad (33)$$

Քննարկենք երկու օրինակ։

Օրինակ 52: Լուծել $\left[x^2 - x + 6\right] = \frac{2023}{2024}$ հավասարումը։

Լուծում: Քանի որ $\frac{2023}{2024} \notin Z$ և $\left[x^2 - x + 6\right] \in Z$, ուստի, համաձայն (33)-ի, կունենանք՝ $x \in \varnothing$։

Պատ.՝ $x \in \varnothing$։

Օրինակ 53: Լուծել $\left[2x+5\right] = -3$ հավասարումը։

Լուծում: Համաձայն (33)-ի ունենք՝

$$-3 \in Z \Rightarrow \left[2x+5\right] = -3 \Leftrightarrow -3 \le 2x+5 < -2 \Leftrightarrow -4 \le x < -3,5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in \left[-4; -3,5\right) :$$

Պատ.՝ $x \in \left[-4; -3,5\right)$։

Դիտարկենք $\left[f(x)\right] > a$ ***անհավասարումը:***

(29) հատկության համաձայն ունենք՝ $a < \left[a\right] + 1 \le a+1$, հետևաբար, ի նկատի ունենալով սահմանում 1-ը, դիտարկվող հավասարման համար կունենանք՝

$$\left[f(x)\right] > a \Leftrightarrow f(x) \ge \left[a\right] + 1 : \qquad (34)$$

Քննարկենք մեկ օրինակ։

Օրինակ 54: Լուծել $\left[1 - x^2\right] > -4$ անհավասարումը։

Լուծում: Համաձայն (34)-ի ունենք՝

$$\left[1-x^2\right] > -4 \Leftrightarrow 1-x^2 \geq [-4]+1 \Leftrightarrow \; x^2 \leq 4 \Leftrightarrow x \in [-2;2]:$$

Պատ.՝ $x \in [-2;2]$:

Դիտարկենք $\left[f(x)\right] < a$ ***անհավասարումը:***

Հեշտ է նկատել, որ երբ $a \in Z$, ապա $\left[f(x)\right] < a \Leftrightarrow f(x) < a$, իսկ երբ $a \notin Z$, ապա ի նկատի ունենալով (28) հատկությունը, կունենանք՝ $\left[f(x)\right] < a \;\Leftrightarrow\; f(x) < [a]+1$: Այսպիսով, դիտարկվող անհավասարման համար ստացանք՝

$$\left[f(x)\right] < a \Leftrightarrow \begin{cases} a \in Z \;\Rightarrow\; f(x) < a \\ a \in R \setminus Z \;\Rightarrow\; f(x) < [a]+1 \end{cases} : \qquad (35)$$

Քննարկենք երկու օրինակ:

Օրինակ 55: Լուծել $\left[x^2-7x+5\right] < -7$ անհավասարումը:

Լուծում: Համաձայն (35)-ի ունենք՝

$$a=-7 \in Z \;\Rightarrow\; \left[x^2-7x+5\right] < -7 \;\Leftrightarrow\; x^2-7x+5 < -7 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x^2-7x+12 < 0 \;\Leftrightarrow\; x \in (3;4):$$

Պատ.՝ $x \in (3;4)$:

Օրինակ 56: Լուծել $\left[\dfrac{1-3x}{2}\right] < 10,3$ անհավասարումը:

Լուծում: Համաձայն (35)-ի ունենք՝

$$a=10,3\in R\setminus Z \;\Rightarrow\; \left[\frac{1-3x}{2}\right]<10,3 \;\Leftrightarrow\; \frac{1-3x}{2}<[10,3]+1 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 1-3x<22 \;\Leftrightarrow\; x>-7 \;\Leftrightarrow\; x\in(-7;+\infty):$$

Պատ.՝ $x\in(-7;+\infty):$

Դիտարկենք $\{f(x)\}=\alpha$ ***հավասարումը:***

Համաձայն (30) հատկության՝ հավասարման ԹԱԲ-ում ձախ մասը միշտ ընդունում է արժեքներ $[0;1)$ տիրույթից, հետևաբար $\alpha\notin[0;1)$ դեպքում տրված հավասարումը լուծում չի ունենա, իսկ $\alpha\in[0;1)$ դեպքում, ի նկատի ունենալով սահմանում 2-ը և (32) հատկությունը, կունենանք՝ $f(x)=n+\alpha;\ n\in Z:$ Այսպիսով, դիտարկվող հավասարման համար ստացանք՝

$$\{f(x)\}=\alpha \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha\in[0;1) \;\Rightarrow\; f(x)=n+\alpha;\ n\in Z\\ \alpha\in R\setminus[0;1) \;\Rightarrow\; x\in\varnothing\end{cases} : \qquad (36)$$

Քննարկենք երկու օրինակ:

Օրինակ 57: Լուծել $\{7x-1\}=-0,7$ հավասարումը:

Լուծում: Համաձայն (36)-ի ունենք՝

$$\alpha=-0,7\in R\setminus[0;1) \;\Rightarrow\; \{7x-1\}=-0,7 \;\Leftrightarrow\; x\in\varnothing:$$

Պատ.՝ $x\in\varnothing:$

Օրինակ 58: Լուծել $\left\{\frac{1-3x}{2}\right\}=\frac{1}{3}$ հավասարումը:

Լուծում: Համաձայն (36)-ի ունենք՝

$$\alpha=\frac{1}{3}\in[0;1)\ \Rightarrow\ \left\{\frac{1-3x}{2}\right\}=\frac{1}{3}\ \Leftrightarrow\ \frac{1-3x}{2}=n+\frac{1}{3};\ \ n\in Z\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-2n\right);\ n\in Z:$$

Պատ.՝ $x=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-2n\right);\ n\in Z$ ։

Դիտարկենք $\{f(x)\}>\alpha$ ***անհավասարումը:***

Համաձայն (30) հատկության՝ անհավասարման ԹԱԲ-ում ձախ մասը միշտ ընդունում է արժեքներ $[0;1)$ տիրույթից, հետևաբար հեշտ է նկատել, որ $\alpha<0$ դեպքում անհավասարման ԹԱԲ-ի յուրաքանչյուր արժեք կբավարարի դիտարկվող անհավասարմանը, $\alpha\geq 1$ դեպքում տրված անհավասարումը լուծում չի ունենա, իսկ $\alpha\in[0;1)$ դեպքում, ի նկատի ունենալով սահմանում 2-ը և (32) հատկությունը, կունենանք՝ $n+\alpha<f(x)<n+1;\ n\in Z$ ։ Այսպիսով, դիտարկվող անհավասարման համար ստացանք՝

$$\{f(x)\}>\alpha\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha\in(-\infty;0)\ \Rightarrow\ x\in D(f)\\ \alpha\in[0;1)\ \Rightarrow\ n+\alpha<f(x)<n+1;\ n\in Z\\ \alpha\in[1;+\infty)\ \Rightarrow\ x\in\varnothing\end{cases},\quad (37)$$

Քննարկենք երեք օրինակ:

Օրինակ 59: Լուծել $\left\{\sqrt{1-x}\right\}>-1$ անհավասարումը:

Լուծում: Համաձայն (37) -ի ունենք՝

$\alpha=-1\in(-\infty;0)\ \Rightarrow\ \left\{\sqrt{1-x}\right\}>-1\ \Leftrightarrow\ 1-x\geq 0\ \Leftrightarrow\ x\leq 1\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ x\in(-\infty;1]$:

Պատ.՝ $x\in(-\infty;1]$:

Օրինակ 60: Լուծել $\left\{2024-2023x+x^2\right\}>2022$ անհավասարումը:

Լուծում: Համաձայն (37)-ի ունենք՝

$\alpha=2022\in[1;+\infty)\ \Rightarrow\ \left\{2024-2023x+x^2\right\}>2022\ \Rightarrow\ x\in\varnothing$:

Պատ.՝ $x\in\varnothing$:

Օրինակ 61: Գտնել $\{\sin x\}>\frac{3}{4}$ անհավասարման այն լուծումները, որոնք պատկանում են $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ միջակայքին:

Լուծում: Համաձայն (37)-ի ունենք՝

$$\alpha=\frac{3}{4}\in[0;1)\ \Rightarrow\ \{\sin x\}>\frac{3}{4}\ \Leftrightarrow\ n+\frac{3}{4}<\sin x<n+1;\ n\in Z\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}n=-1\\ n=0\end{array}\right.\\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{4}<\sin x<0\\ \frac{3}{4}<\sin x<1\end{array}\right.\\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x\in\left(-\arcsin\frac{1}{4};0\right)\cup\left(\arcsin\frac{3}{4};\frac{\pi}{2}\right)\ :$$

Պատ.՝ $x \in \left(-\arcsin\frac{1}{4};0\right) \cup \left(\arcsin\frac{3}{4};\frac{\pi}{2}\right)$:

Դիտարկենք $\{f(x)\} < \alpha$ ***անհավասարումը:***

Համաձայն (30) հատկության՝ անհավասարման ԹԱԲ-ում ձախ մասը միշտ ընդունում է արժեքներ $[0;1)$ տիրույթից, հետևաբար հեշտ է նկատել, որ $\alpha \le 0$ դեպքում տրված անհավասարումը լուծում չի ունենա, իսկ $\alpha \ge 1$ դեպքում անհավասարման ԹԱԲ-ի յուրաքանչյուր արժեք կբավարարի դիտարկվող անհավասարմանը, իսկ $\alpha \in (0;1)$ դեպքում, ի նկատի ունենալով սահմանում 2-ը և (32) հատկությունը, կունենանք՝ $n \le f(x) < n+\alpha;\ n \in Z$: Այսպիսով՝ դիտարկվող անհավասարման համար ստացանք՝

$$\{f(x)\} < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \in (-\infty;0] \ \Rightarrow\ x \in \varnothing \\ \alpha \in (0;1) \ \Rightarrow\ n \le f(x) < n+\alpha;\ n \in Z \\ \alpha \in [1;+\infty) \ \Rightarrow\ x \in D(f) \end{cases} : \qquad (38)$$

Քննարկենք երեք օրինակ:

Օրինակ 62: Լուծել $\{\cos x\} < -1$ անհավասարումը:

Լուծում: Համաձայն (38)-ի ունենք՝

$$\alpha = -1 \in (-\infty;0] \ \Rightarrow\ \{\cos x\} < -1 \ \Leftrightarrow\ \ x \in \varnothing :$$

Պատ.՝ $x \in \varnothing$:

Օրինակ 63: Լուծել $\{\log_{2024}(1-x)\} < 3$ անհավասարումը:

Լուծում: Համաձայն (38) -ի ունենք՝ $\alpha = 3 \in [1;+\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\log_{2024}(1-x)\} < 3 \Leftrightarrow 1-x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;1)$:

Պատ.՝ $x \in (-\infty;1)$:

Օրինակ 64: Գտնել $\{\cos x\} < \frac{1}{4}$ անհավասարման այն լուծումները, որոնք պատկանում են $x \in [0;\pi]$ միջակայքին:

Լուծում: Համաձայն (38)-ի ունենք՝

$$\alpha = \frac{1}{4} \in (0;1) \;\Rightarrow\; \{\cos x\} < \frac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; n \le \cos x < n + \frac{1}{4};\; n \in Z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} n = -1 \\ n = 0 \end{array}\right. \\ x \in [0;\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -1 \le \cos x < -\frac{3}{4} \\ 0 \le \cos x < \frac{1}{4} \end{array}\right. \\ x \in [0;\pi] \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; x \in \left(0;\arccos\frac{1}{4}\right) \cup \left(\pi - \arccos\frac{3}{4};\pi\right) \; :$$

Պատ.՝ $x \in \left(0;\arccos\frac{1}{4}\right) \cup \left(\pi - \arccos\frac{3}{4};\pi\right)$:

Դիտարկենք $[f(x)] = g(x)$ ***հավասարումը:***

Հեշտ է նկատել, որ տրված հավասարումը լուծում կունենա այն և միայն այն դեպքում, երբ $g(x)$-ը կընդունի ամբողջ արժեքներ: Մյուս կողմից, (30) հատկության և սահմանում 2-ի համաձայն ունենք՝

$$0 \le \{f(x)\} < 1 \;\Leftrightarrow\; 0 \le f(x) - [f(x)] < 1,$$

հետևաբար դիտարկվող հավասարման համար կունենանք՝

$$\left[f(x)\right]=g(x) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 0\le f(x)-g(x)<1 \\ g(x)\in Z \end{cases}: \qquad (39)$$

Քննարկենք մեկ օրինակ:

Օրինակ 65: Լուծել $\left[\dfrac{6x+5}{8}\right]=\dfrac{15x-7}{5}$ հավասարումը:

Լուծում: Համաձայն (39) -ի ունենք՝

$$\left[\frac{6x+5}{8}\right]=\frac{15x-7}{5} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 0\le \dfrac{6x+5}{8}-\dfrac{15x-7}{5}<1 \\ \dfrac{15x-7}{5}\in Z \end{cases} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \begin{cases} 0\le 81-90x<40 \\ \dfrac{15x-7}{5}=n;\quad n\in Z \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 0\le 81-6(5n+7)<40 \\ 15x=5n+7 \\ n\in Z \end{cases} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \begin{cases} -\dfrac{1}{30}<n\le\dfrac{39}{30} \\ 15x=5n+7 \\ n\in Z \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \left[\begin{array}{l} n=0 \\ n=1 \end{array}\right. \\ 15x=5n+7 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{7}{15} \\ x=\dfrac{4}{5} \end{array}\right.:$$

Պատ.՝ $x_1=\dfrac{7}{15};\;\; x_2=\dfrac{4}{5}:$

Դիտարկենք $\{f(x)\}=g(x)$ ***հավասարումը:***

Ի նկատի ունենալով սահմանում 2-ը՝ հեշտ է նկատել, որ դիտարկվող հավասարումը համարժեք է

$\left[f(x)\right]=f(x)-g(x)$ հավասարմանը, որը նախորդ ենթակետում արդեն քննարկել ենք:

Քննարկենք երկու օրինակ:

Օրինակ 66: Լուծել $\{x\}=\dfrac{x^3+x-1}{x^2+1}$ հավասարումը:

Լուծում: Համաձայն սահմանում 2-ի, ունենք՝ $x-[x]=\dfrac{x^3+x-1}{x^2+1} \Leftrightarrow [x]=\dfrac{1}{x^2+1}$, որտեղից, ի նկատի ունենալով (39)-ը, կստանանք.

$$\begin{cases} 0\le x-\dfrac{1}{x^2+1}<1 \\ \dfrac{1}{x^2+1}=[x]\in Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0\le x-\dfrac{1}{x^2+1}<1 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow x\in\varnothing:$$

Պատ.՝ $x\in\varnothing$:

Օրինակ 67: Լուծել $\{x\}=\dfrac{8x-x^2-7}{8}$ հավասարումը:

Լուծում: Համաձայն սահմանում 2-ի, ունենք՝ $x-[x]=\dfrac{8x-x^2-7}{8} \Leftrightarrow [x]=\dfrac{x^2+7}{8}$, որտեղից, ի նկատի ունենալով (39)-ը, կստանանք.

$$\begin{cases} 0\le x-\dfrac{x^2+7}{8}<1 \\ \dfrac{x^2+7}{8}=[x]\in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le 8x-x^2-7<8 \\ \dfrac{x^2+7}{8}=[x]\in Z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [1;3) \cup (5;7] \\ \dfrac{x^2+7}{8} = [x] \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [1;3) \cup (5;7] \\ \dfrac{x^2+7}{8} = [x] \in Z \\ [x] \in [1;2) \cup (4;7] \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} [x]=1 \\ [x]=5 \\ [x]=6 \\ [x]=7 \end{array}\right. :$$

Այժմ առանձին-առանձին քննարկենք $[x]$ -ի բոլոր հնարավոր արժեքները:

$$[x]=1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+7}{8} = 1 \\ x \in [1;3) \cup (5;7] \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = 1;$$

$$[x]=5 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+7}{8} = 5 \\ x \in [1;3) \cup (5;7] \end{cases} \Leftrightarrow x_2 = \sqrt{33};$$

$$[x]=6 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+7}{8} = 6 \\ x \in [1;3) \cup (5;7] \end{cases} \Leftrightarrow x_3 = \sqrt{41};$$

$$[x]=7 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+7}{8} = 7 \\ x \in [1;3) \cup (5;7] \end{cases} \Leftrightarrow x_4 = 7 :$$

Պատ.՝ $x_1 = 1;\ x_2 = \sqrt{33};\ x_3 = \sqrt{41};\ x_4 = 7:$

§5. Անհավասարություններ։

Անհավասարությունների ապացուցման համար չկան համապիտանի եղանակներ, սակայն կան տարրական մեթոդներ, որոնք թույլ են տալիս հնարամիտ և ստեղծագործական մոտեցման արդյունքում հասնել տարբեր անհավասարությունների ապացուցման։

Ստորև կանդրադառնանք անհավասարությունների ապացուցման որոշ տարրական եղանակների էության ներկայացմանը և մեկնաբանմանը, որից հետո կքննարկենք տարբեր անհավասարություններ, որոնք կապացուցենք մատնանշած տարրական եղանակների կիրառմամբ։

Անհավասարությունների ապացուցում սահմանման օգնությամբ։

Այս եղանակի էությունը կայանում է հետևյալում. ապացուցելու համար, որ տեղի ունի

$$A>B \tag{40}$$

անհավասարությունը, որտեղ A-ն և B-ն փոփոխական և/կամ թվային արտահայտություններ են, համաձայն «մեծ» բինար (երկտեղանի) հարաբերության սահմանման, անհրաժեշտ է և բավարար ապացուցել, որ A-B տարբերությունը դրական է։

Այսինքն՝ (40) անհավասարության ապացուցման համար դիտարկում ենք A-B տարբերությունը և նույնական ձևափոխությունների միջոցով փորձում ենք ապացուցել, որ տեղի ունի A-B>0 անհավասարությունը, այսինքն՝

$$A>B \Leftrightarrow A-B>0\,, \qquad (41)$$

որտեղից անմիջականորեն կստանանք, որ.

$$A\geq B \Leftrightarrow A-B\geq 0\,: \qquad (42)$$

Դիտարկենք մի քանի օրինակներ:

Օրինակ 68: Ապացուցել, որ կամայական a և b իրական թվերի համար տեղի ունի $a^2+b^2+1\geq ab+a+b$ անհավասարությունը:

Լուծում: Դիտարկենք $a^2+b^2+1-\left(ab+a+b\right)$ տարբերությունը, ունենք՝

$$a^2+b^2+1-\left(ab+a+b\right)=\frac{1}{2}\left(\left(a-b\right)^2+\left(a-1\right)^2+\left(b-1\right)^2\right)\geq 0\,,$$

ընդ որում, հավասարության դեպքը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $a=b=1$, հետևաբար, համաձայն (42)-ի՝ $a^2+b^2+1\geq ab+a+b$, որտեղ հավասարություն տեղի ունի $a=b=1$ դեպքում: Անհավասարությունն ապացուցված է:

Օրինակ 69: Ապացուցել, որ կամայական a և b իրական դրական թվերի համար տեղի ունի $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ անհավասարությունը:

Լուծում: Դիտարկենք $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2$ տարբերությունը, ունենք՝

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}=\frac{\left(a-b\right)^2}{ab}\geq 0\,,$$

ընդ որում, հավասարության դեպքը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $a=b$, հետևաբար, համաձայն (42)-ի՝ $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$, որտեղ հավասարություն տեղի ունի $a=b$ դեպքում: Անհավասարությունն ապացուցված է:

Օրինակ 70: Ապացուցել, որ կամայական a և b իրական թվերի համար տեղի ունի $a^2+ab+b^2\geq 3(a+b-1)$ անհավասարությունը:

Լուծում: Դիտարկենք $a^2+ab+b^2-3(a+b-1)$ տարբերությունը, ունենք՝

$$a^2+ab+b^2-3(a+b-1)=(a-1)^2+(b-1)^2+(a-1)(b-1)=$$

$$=\left(a-1+\frac{b-1}{2}\right)^2+\frac{3(b-1)^2}{4}\geq 0 ,$$

ընդ որում, հավասարության դեպքը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $a=b=1$, հետևաբար, համաձայն (42)-ի՝ $a^2+ab+b^2\geq 3(a+b-1)$, որտեղ հավասարություն տեղի ունի $a=b=1$ դեպքում: Անհավասարությունն ապացուցված է:

Անհավասարությունների ապացուցման սինթետիկ մեթոդը:

Այս մեթոդի էությունը կայանում է հետևյալում. ելակետային ակնհայտ կամ հայտնի անհավասարության և/կամ անհավասարությունների կիրառմամբ, մի շարք նույնական ձևափոխությունների միջոցով հանգել տրված ապացուցվելիք անհավասարության ապացույցին:

Այսինքն՝ տրված (40) անհավասարությունն ապացուցելու համար որպես ելակետ դիտարկում ենք մեկ կամ մի քանի ակնհայտ և/կամ հայտնի անհավասարություններ և վերջիններիս նույնական ձևափոխությունների միջոցով հանգում ենք տրված (40) անհավասարության ապացույցին:

Ստորև, որպես հայտնի անհավասարություններ, կդիտարկենք և կօգտվենք Կոշու և Կոշու-Բունյակովսկու անհավասարություններից, որոնցից առաջինը՝ Կոշու անհավասարությունը դիտարկվում և ապացուցվում է մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում, իսկ երկրորդն, ըստ էության հետևանք է երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալի սահմանման, համաձայն որի φ անկյուն կազմող կամայական $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների համար ունենք՝ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$:

<u>Կոշու անհավասարությունը</u>. կամայական իրական, ոչ բացասական $a_1;\ a_2;\ \cdots;\ a_n$ թվերի համար տեղի ունի

$$\frac{a_1+a_2+\ \cdots\ +a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ \cdots\ \cdot a_n} \tag{43}$$

անհավասարությունը, որտեղ հավասարության դեպքը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $a_1=a_2=\ \cdots\ =a_n$:

<u>Կոշու-Բունյակովսկու անհավասարությունը</u>. կամայական իրական $a_1;\ a_2;\ \cdots;\ a_n$ և $b_1;\ b_2;\ \cdots;\ b_n$ թվերի համար տեղի ունի

$$\begin{gathered}\left(a_1^2+a_2^2+\ \cdots\ +a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\ \cdots\ +b_n^2\right)\ge\\ \ge\left(a_1b_1+a_2b_2+\ \cdots\ +a_nb_n\right)^2\end{gathered} \tag{44}$$

անհավասարությունը, որտեղ հավասարության դեպքը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի t իրական թիվ այնպիսին, որ $a_1 = tb_1;\ a_2=tb_2;\ \cdots;\ a_n = tb_n$:

Նշենք, որ կամայական $a_1;\ a_2;\ \cdots;\ a_n$ իրական դրական թվերի համար.

$\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$ թիվը կոչվում է $a_1;\ a_2;\ \cdots;\ a_n$ թվերի *միջին հարմոնիկ*,

$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}$ թիվը կոչվում է $a_1;\ a_2;\ \cdots;\ a_n$ թվերի *միջին երկրաչափական*,

$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ թիվը կոչվում է $a_1;\ a_2;\ \cdots;\ a_n$ թվերի *միջին թվաբանական*,

$\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$ թիվը կոչվում է $a_1;\ a_2;\ \cdots;\ a_n$ թվերի *միջին քառակուսային*,

ընդ որում, տեղի ունեն հետևյալ անհավասարությունները՝

$$\min\left(a_1;\ a_2;\ \cdots;\ a_n\right) \le \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} \le \tag{45}$$

$$\le \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}} \le \max\left(a_1;\ a_2;\cdots;\ a_n\right),$$

որոնցում հավասարության դեպքը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$:

Դիտարկենք մի քանի օրինակներ։

Օրինակ 71։ Ապացուցել, որ կամայական a և b

իրական թվերի համար, եթե $a+b \geq 1$, ապա տեղի ունի $a^4+b^4 \geq 1/8$ անհավասարությունը:

Լուծում: Ի նկատի ունենալով ելակետային $a+b \geq 1$ պայմանը՝ դիտարկենք հետևյալ ակնհայտ ճշմարիտ անհավասարությունները. $(a+b)^2 \geq 1$ և $(a-b)^2 \geq 0$:

Գումարելով այս անհավասարությունները միմյանց, կունենանք՝ $a^2+b^2 \geq 1/2$:

Ի նկատի ունենալով վերջին $a^2+b^2 \geq 1/2$ ճշմարիտ անհավասարությունը՝ դիտարկենք հետևյալ ակնհայտ ճշմարիտ անհավասարությունները. $\left(a^2+b^2\right)^2 \geq 1/4$ և $\left(a^2-b^2\right)^2 \geq 0$: Գումարելով այս անհավասարությունները միմյանց, կունենանք՝ $a^4+b^4 \geq 1/8$, այն, ինչ պահանջվում էր ապացուցել:

Օրինակ 72: Ապացուցել, որ կամայական a; b և c իրական դրական թվերի համար տեղի ունի $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ անհավասարությունը:

Լուծում: Համաձայն Կոշու (43) անհավասարության, ունենք՝ $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $b+c \geq 2\sqrt{bc}$, $c+a \geq 2\sqrt{ca}$, որտեղից, բազմապատկելով միմյանց հետ, կստանանք՝

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc,$$

որտեղ հավասարության դեպքը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $a=b=c$: Անհավասարությունն ապացուցված է:

Օրինակ 73: Ապացուցել, որ կամայական a և b իրական թվերի համար տեղի ունի $2\left(a^4+b^4\right)+17>16ab$

անհավասարությունը:

Լուծում: Համաձայն Կոշու (43) անհավասարության, ունենք՝ $a^4+b^4\geq 2a^2b^2$ որտեղից՝ $2\left(a^4+b^4\right)+17\geq 4a^2b^2+$
$+17=4\left(a^2b^2+4\right)+1>4\left(a^2b^2+4\right)\geq 4\cdot 2\sqrt{4a^2b^2}=16ab$:

Անհավասարությունն ապացուցված է:

Օրինակ 74: Ապացուցել, որ կամայական $n\geq 2$ բնական թվի համար տեղի ունի $\sqrt[n]{n!}<\left(n+1\right)/2$ անհավասարությունը:

Լուծում: Համաձայն Կոշու (43) անհավասարության, ունենք՝ $\sqrt[n]{n!}=\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}<\left(1+2+\ldots+n\right)/n=\left(n+1\right)/2$:

Անհավասարությունն ապացուցված է:

Նշենք, որ օրինակ 69-ում և օրինակ 68-ում բերված անհավասարությունները կարելի է ապացուցել նաև Կուշու անհավասարության անմիջական կիրառմամբ: Ստորև ներկայացնենք այդ անհավասարությունների ապացուցման այլ մոտեցումներ:

Օրինակ 75: Ապացուցել, որ կամայական a և b իրական դրական թվերի համար տեղի ունի $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geq 2$ անհավասարությունը:

Լուծում: Կամայական a_1 և a_2 իրական դրական թվերի համար, համաձայն Կոշու (43) անհավասարության, ունենք՝ $\dfrac{a_1+a_2}{2}\geq\sqrt{a_1\cdot a_2}$, որտեղից, $a_1=\dfrac{a}{b}$ և $a_2=\dfrac{b}{a}$ դեպքում կունենանք՝ $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)\Big/2\geq 1\Leftrightarrow\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geq 2$, ընդ որում, հավասարության դեպքը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $a_1 = a_2 \quad \Rightarrow \quad a = b$: Անհավասարությունն ապացուցված է:

Օրինակ 76: Ապացուցել, որ կամայական a և b իրական թվերի համար տեղի ունի $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$ անհավասարությունը:

Լուծում: Համաձայն Կոշու (43) անհավասարության, ունենք՝ $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $a^2 + 1 \geq 2a$, $b^2 + 1 \geq 2b$, որտեղից, գումարելով միմյանց, կստանանք՝ $2\left(a^2 + b^2 + 1\right) \geq$ $\geq 2\left(ab + a + b\right) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$, ընդ որում, հավասարության դեպքը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $a = b = 1$:

Անհավասարությունն ապացուցված է:

Այժմ դիտարկենք անհավասարություններ, որոնք կապացուցենք Կոշու-Բունյակովսկու անհավասարության անմիջական կիրառմամբ:

Օրինակ 77: Ապացուցել, որ կամայական α և β իրական թվերի համար տեղի ունի $\sin\alpha \sin\beta +$ $+ \cos\alpha + \cos\beta \leq 2$ անհավասարությունը:

Լուծում: Համաձայն Կոշու-Բունյակովսկու (44) անհավասարության, ունենք՝ $\sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha + \cos\beta =$

$$= \sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha \cdot 1 + 1 \cdot \cos\beta \leq \left|\sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha \cdot 1 + 1 \cdot \cos\beta\right| \leq$$

$$\leq \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 1} \cdot \sqrt{\sin^2\beta + 1 + \cos^2\beta} = 2:$$

Անհավասարությունն ապացուցված է:

Օրինակ 78: Ապացուցել, որ կամայական a; b և c իրական թվերի համար, եթե $a + 2b + 3c \geq 14$, ապա տեղի ունի $a^2+b^2+c^2 \geq 14$ անհավասարությունը:

Լուծում: Համաձայն Կոշու-Բունյակովսկու (44) անհավասարության, ունենք՝ $a^2+b^2+c^2=\dfrac{14\left(a^2+b^2+c^2\right)}{14}=$

$$=\frac{\left(1^2+2^2+3^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)}{14} \geq \frac{\left(1\cdot a+2\cdot b+3\cdot c\right)^2}{14} \geq 14$$

Անհավասարությունն ապացուցված է:

Օրինակ 79: Ապացուցել, որ կամայական a և b իրական թվերի համար, եթե $|a| \leq 1$ և $|b| \leq 1$, ապա տեղի ունի $ab+\sqrt{\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)} \leq 1$ անհավասարությունը:

Լուծում: Համաձայն Կոշու-Բունյակովսկու (44) անհավասարության, ունենք՝ $ab+\sqrt{\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)} \leq$

$$\leq \left|ab+\sqrt{\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)}\right| \leq \sqrt{a^2+\left(\sqrt{1-a^2}\right)^2}\cdot\sqrt{b^2+\left(\sqrt{1-b^2}\right)^2}=1:$$

Անհավասարությունն ապացուցված է:

Օրինակ 80: Ապացուցել, որ կամայական $x; y$ և z իրական թվերի համար, եթե $x \geq -\dfrac{1}{4};\ y \geq -\dfrac{1}{4};\ z \geq -\dfrac{1}{4}$ և $x+y+z=1$, ապա տեղի ունի $\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1}<5$ անհավասարությունը:

Լուծում: Համաձայն Կոշու-Բունյակովսկու (44) անհավասարության, ունենք՝ $\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1}=$

$$=1\cdot\sqrt{4x+1}+1\cdot\sqrt{4y+1}+1\cdot\sqrt{4z+1} \leq$$

$$\leq \sqrt{\left(1^2+1^2+1^2\right)\left(\left(\sqrt{4x+1}\right)^2+\left(\sqrt{4y+1}\right)^2+\left(\sqrt{4z+1}\right)^2\right)}=\sqrt{21}<5:$$

Անհավասարությունն ապացուցված է:

Օրինակ 81: Ապացուցել, որ կամայական $a \in \left[\frac{3}{2}; \frac{50}{3}\right]$ իրական թվերի համար տեղի ունի $\sqrt{a+1}+\sqrt{2a-3}+$ $+\sqrt{50-3a} \le 12$ անհավասարությունը:

Լուծում: Համաձայն Կոշու-Բունյակովսկու (44) անհավասարության, ունենք՝ $\sqrt{a+1}+\sqrt{2a-3}+\sqrt{50-3a}=$ $=1\cdot\sqrt{a+1}+1\cdot\sqrt{2a-3}+1\cdot\sqrt{50-3a}=$

$$\le \sqrt{\left(1^2+1^2+1^2\right)\left(\left(\sqrt{a+1}\right)^2+\left(\sqrt{2a-3}\right)^2+\left(\sqrt{50-3a}\right)^2\right)}=12:$$

Անհավասարությունն ապացուցված է:

Անհավասարությունների ապացուցում փոփոխականի փոխարինման մեթոդով:

Երբեմն ապացուցման ենթակա տրված անհավասարության մեջ փոփոխականների հարմար փոխարինումը հնարավորություն է տալիս հեշտությամբ հասնել ելակետային անհավասարության ապացույցին: Այս համատեքստում դիտարկենք մի քանի օրինակներ:

Օրինակ 82: Ապացուցել, որ կամայական x և y իրական թվերի համար տեղի ունի $-\frac{1}{2} \le \frac{(x+y)(1-xy)}{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)} \le \frac{1}{2}$ անհավասարությունը:

Լուծում: Կատարենք փոփոխականների փոխարինում. դիցուք՝ $x = tg\alpha$ և $y = tg\beta$, որտեղ

$\alpha;\beta\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$: Այդ դեպքում կունենանք՝ $\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}=$

$$=\frac{(tg\alpha+tg\beta)(1-tg\alpha tg\beta)}{(1+tg^2\alpha)(1+tg^2\beta)}=\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)=$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2(\alpha+\beta)\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{2}\le\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}\le\frac{1}{2}:$$

Անհավասարությունն ապացուցված է:

Օրինակ 83: Ապացուցել, որ կամայական a; b և c իրական թվերի համար, եթե $a;b;c>0$ և $abc=1$, ապա տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}\le 1:$$

Լուծում: Կատարենք փոփոխականների փոխարինում. դիցուք՝ $a=x^3$; $b=y^3$ և $c=z^3$, որտեղ $x;y;z\in R$; $x;y;z>0$ և $xyz=1$: Այդ դեպքում կունենանք՝

$\frac{1}{1+a+b}=\frac{xyz}{xyz+x^3+y^3}\le\frac{xyz}{xyz+xy(x+y)}=\frac{z}{x+y+z}$, որտեղ հավասարության դեպքը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $x=y$:

Համանման ձևով կստանանք՝

ա/ $\frac{1}{1+b+c}\le\frac{x}{x+y+z}$, որտեղ հավասարության դեպքը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $y=z$,

բ/ $\frac{1}{1+c+a}\le\frac{y}{x+y+z}$, որտեղ հավասարության դեպքը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $z=x$:

Ստացված անհավասարությունները գումարելով միմյանց, կստանանք՝ $\dfrac{1}{1+a+b}+\dfrac{1}{1+b+c}+\dfrac{1}{1+c+a}\le 1$, որտեղ հավասարության դեպքը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $x=y=z\Rightarrow a=b=c$:

Անհավասարությունն ապացուցված է:

Օրինակ 84: Ապացուցել, որ կամայական m և n իրական թվերի համար, եթե $m;n\ge 1$, ապա տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝ $m\sqrt{n-1}+n\sqrt{m-1}\le mn$:

Լուծում: Կատարենք փոփոխականների փոխարինում. դիցուք՝ $m=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ և $n=\dfrac{1}{\cos^2\beta}$, որտեղ $\alpha;\beta\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$: Այդ դեպքում կունենանք՝ $\dfrac{m\sqrt{n-1}+n\sqrt{m-1}}{mn}=$

$$=\frac{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}+\dfrac{1}{\cos^2\beta}\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\beta}}=\frac{\sin 2\alpha+\sin 2\beta}{2}\le 1,$$ որտեղից

կստանանք՝ $\dfrac{m\sqrt{n-1}+n\sqrt{m-1}}{mn}\le 1\Rightarrow m\sqrt{n-1}+n\sqrt{m-1}\le mn$, ընդ որում, հավասարության դեպքը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $\alpha=\beta=\pi/4\Rightarrow m=n=2$:

Անհավասարությունն ապացուցված է:

Օրինակ 85: Ապացուցել, որ կամայական $a;\,b$ և c իրական թվերի համար, եթե $a;b;c>0$ և $a+b+c=1$, ապա տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝ $a^3+b^3+c^3\ge\dfrac{1}{9}$:

Լուծում: Կատարենք փոփոխականների փոխարինում. դիցուք՝ $a = x + \frac{1}{3}$; $b = y + \frac{1}{3}$ և $c = z + \frac{1}{3}$, որտեղ $x; y; z \in R$; $x; y; z > -\frac{1}{3}$ և $x + y + z = 0$: Այդ դեպքում կունենանք՝ $a^3 = x^3 + x^2 + \frac{x}{3} + \frac{1}{27}$; $b^3 = y^3 + y^2 + \frac{y}{3} + \frac{1}{27}$ և $c^3 = z^3 + z^2 + \frac{z}{3} + \frac{1}{27}$, հետևաբար $a^3 + b^3 + c^3 = x^3 + x^2 + y^3 +$ $+ y^2 + z^3 + z^2 + \frac{x + y + z}{3} + \frac{1}{9} = x^2\left(x+1\right) + y^2\left(y+1\right) + z^2\left(z+1\right) +$ $+\frac{1}{9} \geq \frac{1}{9}$, որտեղ հավասարության դեպքը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $x = y = z = 0 \Rightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$:

Անհավասարությունն ապացուցված է:

Օրինակ 86: Ապացուցել, որ կամայական $x_1;\ x_2;\ \cdots;\ x_n$ իրական թվերի համար, եթե $x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 = 0$ և $x_i \in \left[-1;1\right]$ $\left(i = 1; 2; \cdots; n\right)$, ապա տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝ $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq \frac{n}{3}$:

Լուծում: Կատարենք փոփոխականների փոխարինում. դիցուք՝ $x_i = \sin\alpha_i$ $\left(i = 1; 2; \cdots; n\right)$, որտեղ $\alpha_i \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ և $\sum_{i=1}^{n} \sin^3\alpha_i = 0$: Ի նկատի ունենալով, որ $\sin 3\alpha_i = 3\sin\alpha_i - 4\sin^3\alpha_i$, կունենանք՝ $x_1 + x_2 + \cdots + x_n =$ $= \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \cdots + \sin\alpha_n = \frac{1}{3}\Big[\sin 3\alpha_1 + \sin 3\alpha_2 + \cdots + \sin 3\alpha_n -$

$$-4\left(\sin^3\alpha_1+\sin^3\alpha_2+\cdots+\sin^3\alpha_n\right)\Big]=\frac{1}{3}\Big(\sin 3\alpha_1+\sin 3\alpha_2+\cdots+$$

$$+\sin 3\alpha_n\Big)\le\frac{n}{3}:$$

Անհավասարությունն ապացուցված է:

Անհավասարությունների ապացուցում լրիվ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով:

Երբեմն լրիվ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը արդյունավետ «զործիք» է դառնում տարբեր անհավասարությունների ապացուցման համար: Այս համատեքստում դիտարկենք մի քանի օրինակներ:

Օրինակ 87: Ապացուցել, որ կամայական *n* բնական թվի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}>\frac{n}{2}$:

Լուծում: Անհավասարությունն ապացուցենք լրիվ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով:

Հեշտ է նկատել, որ $n=1$ դեպքում անհավասարությունը ճշմարիտ է՝ $1>1/2$:

Ենթադրենք, որ տրված անհավասարությունը ճշմարիտ է $n=k$ $(k\in N)$ դեպքում, այսինքն՝ տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}>\frac{k}{2}$:

Ապացուցենք, որ տրված անհավասարությունը ճշմարիտ է նաև $n=k+1$ դեպքում, այսինքն տեղի ունի նաև $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}>\frac{k+1}{2}$ անհավասարությունը:

Ունենք՝ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2^{k+1}-1}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2^k-1}\right)+$
$+\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\dots+\frac{1}{2^{k+1}-1}\right)>\frac{k}{2}+2^k\cdot\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{k+1}{2}$: Եվ, ուրեմն, համաձայն լրիվ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդի, անհավասարությունն ապացուցված է:

Օրինակ 88: Ապացուցել, որ 2-ից մեծ կամայական n բնական թվի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝ $2^n>2n+1$:

Լուծում: Անհավասարությունն ապացուցենք լրիվ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով:

Հեշտ է նկատել, որ $n=3$ դեպքում անհավասարությունը ճշմարիտ է՝ $8>7$:

Ենթադրենք, որ տրված անհավասարությունը ճշմարիտ է $n=k$ $(k\in N;\ k>2)$ դեպքում, այսինքն՝ տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝ $2^k>2k+1$:

Ապացուցենք, որ տրված անհավասարությունը ճշմարիտ է նաև $n=k+1$ դեպքում, այսինքն՝ տեղի ունի նաև $2^{k+1}>2(k+1)+1=2k+3$ անհավասարությունը:

Ունենք՝ $2^{k+1}=2\cdot 2^k>2(2k+1)=2k+3+2k-1>2k+3$: Եվ, ուրեմն, համաձայն լրիվ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդի, անհավասարությունն ապացուցված է:

Օրինակ 89: Ապացուցել, որ 1-ից մեծ կամայական n բնական թվի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝ $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{n}$:

Լուծում: Անհավասարությունն ապացուցենք լրիվ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով:

Հեշտ է նկատել, որ $n=2$ դեպքում անհավասարությունը ճշմարիտ է՝ $\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$:

Ենթադրենք, որ տրված անհավասարությունը ճշմարիտ է $n=k$ $\left(k\in N;\ k\geq 2\right)$ դեպքում, այսինքն՝ տեղի ունի $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<1-\frac{1}{k}$ անհավասարությունը:

Ապացուցենք, որ տրված անհավասարությունը ճշմարիտ է նաև $n=k+1$ դեպքում, այսինքն՝ տեղի ունի նաև $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{\left(k+1\right)^2}<1-\frac{1}{k+1}$ անհավասարությունը:

Ունենք՝ $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{\left(k+1\right)^2}<1-\frac{1}{k}+\frac{1}{\left(k+1\right)^2}=1-$

$-\frac{k^2+3k+1}{k\left(k+1\right)^2}=1-\frac{1}{k+1}\cdot\frac{k^2+3k+1}{k^2+k}<1-\frac{1}{k+1}$: Եվ, ուրեմն, համաձայն լրիվ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդի, անհավասարությունն ապացուցված է:

Օրինակ 90: Ապացուցել, որ եթե n -ը 1-ից մեծ կամայական բնական թիվ է, a -ն և b -ն ինչ-որ ուղղանկյուն եռանկյան էջերն են, իսկ c -ն՝ այդ եռանկյան ներքնաձիգը, ապա տեղի ունի $a^n+b^n\leq c^n$ անհավասարությունը:

Լուծում: Անհավասարությունն ապացուցենք լրիվ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով (ըստ n -ի):

Հեշտ է նկատել, որ $n=2$ դեպքում, համաձայն Պյութագորասի թեորեմի, անհավասարությունը ճշմարիտ է՝ $a^2+b^2=c^2 \;\Rightarrow\; a^2+b^2\le c^2$:

Ենթադրենք, որ տրված անհավասարությունը ճշմարիտ է $n=k$ $(k\in N;\ k\ge 2)$ դեպքում, այսինքն՝ տեղի ունի $a^k+b^k\le c^k$ անհավասարությունը:

Ապացուցենք, որ տրված անհավասարությունը ճշմարիտ է նաև $n=k+1$ դեպքում, այսինքն՝ տեղի ունի նաև $a^{k+1}+b^{k+1}\le c^{k+1}$ անհավասարությունը:

Ունենք՝ $a^{k+1}+b^{k+1}=a\cdot a^k+b\cdot b^k<c\left(a^k+b^k\right)\le c\cdot c^k=c^{k+1}$:

Եվ, ուրեմն, համաձայն լրիվ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդի, անհավասարությունն ապացուցված է:

Օրինակ 91: Ապացուցել, որ կամայական *n* բնական թվի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝ $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\le\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$:

Լուծում: Անհավասարությունն ապացուցենք լրիվ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով:

Հեշտ է նկատել, որ $n=1$ դեպքում անհավասարությունը ճշմարիտ է՝ $\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}$:

Ենթադրենք, որ տրված անհավասարությունը ճշմարիտ է $n=k$ $(k\in N)$ դեպքում, այսինքն՝ տեղի ունի $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}\le\frac{1}{\sqrt{3k+1}}$ անհավասարությունը:

Ապացուցենք, որ տրված անհավասարությունը ճշմարիտ է նաև $n=k+1$ դեպքում, այսինքն՝ տեղի ունի նաև $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\le\frac{1}{\sqrt{3k+4}}$ անհավասարությունը:

Նախապես նկատենք, որ կամայական $k\in N$ բնական թվի համար տեղի ունի $\frac{2k+1}{2k+2}\le\frac{\sqrt{3k+1}}{\sqrt{3k+4}}$ (համոզվելու համար բավական է անհավասարության երկու մասը բարձրացնել քառակուսի, որից հետո հաշվել աջ և ձախ մասերի տարբերությունը): Այժմ վերադառնանք $n=k+1$ դեպքին: Ունենք՝ $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}\right)\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\le\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\le$ $\le\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{\sqrt{3k+1}}{\sqrt{3k+4}}=\frac{1}{\sqrt{3k+4}}$: Եվ, ուրեմն, համաձայն լրիվ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդի, անհավասարությունն ապացուցված է:

Անհավասարությունների ապացուցում համաչափության և համասեռության կիրառմամբ:

Հանդիպում են անհավասարություններ, որոնք փոփոխականների նկատմամբ կամ համաչափ են, կամ՝ համասեռ:

Համաչափության դեպքում, առանց ընդհանրությունը խախտելու, ուզած ձևով կարող ենք փոփոխականները դասավորել աճման և/կամ նվազման կարգով, ինչն էլ շատ դեպքերում որոշիչ է դառնում տրված անհավասարության ապացուցման համար:

Համասեռության դեպքում (երբ անհավասարությունը չի փոխվում նրանում յուրաքանչյուր փոփոխական իրեն λ

-պատիկով փոխարինելիս), առանց ընդհանրությունը խախտելու, ուզած ձևով կարող ենք գնահատել փոփոխականների գումարը, ինչն էլ շատ դեպքերում որոշիչ է դառնում տրված անհավասարության ապացուցման համար:

Վերոգրյալի համատեքստում դիտարկենք մի քանի օրինակներ:

Օրինակ 92: Ապացուցել, որ կամայական *x*; *y* և *z* ոչ բացասական իրական թվերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$x(x-z)^2+y(y-z)^2 \ge (x-z)(y-z)(x+y-z):$$

Լուծում: Հեշտ է նկատել, որ տրված անհավասարությունը համաչափ (սիմետրիկ) է փոփոխականների նկատմամբ, հետևաբար, առանց ընդհանրությունը խախտելու, կարող ենք ենթադրել, որ $x \ge z \ge y$, որտեղից կստանանք՝ $x(x-z)^2+y(y-z)^2 \ge$ $\ge 0 \ge (x-z)(y-z)(x+y-z)$:

Անհավասարությունն ապացուցված է:

Օրինակ 93: Ապացուցել, որ կամայական *a*; *b* և *c* ոչ բացասական իրական թվերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝ $abc \ge (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$:

Լուծում: Հեշտ է նկատել, որ տրված անհավասարությունը համաչափ (սիմետրիկ) է փոփոխականների նկատմամբ, հետևաբար, առանց ընդհանրությունը խախտելու, կարող ենք ենթադրել, որ $0 \le a \le b \le c$: Ունենք՝

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad abc \geq (b+c-a)\left(a^2-(b-c)^2\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (b-c)^2 (b+c-a) \geq a(a-c)(b-a),$$

որտեղից, համաձայն $0 \leq a \leq b \leq c$ առնչությունների, կստանանք՝ $(b-c)^2 (b+c-a) \geq 0 \geq a(a-c)(b-a)$:

Անհավասարությունն ապացուցված է:

Օրինակ 94: Ապացուցել, որ կամայական a; b և c իրական դրական թվերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝ $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$:

Լուծում: Հեշտ է նկատել, որ տրված անհավասարությունը համասեռ է a; b և c փոփոխականների նկատմամբ (այսինքն՝ a-ն λa-ով, b-ն λb-ով, c-ն λc-ով փոխարինելիս, որտեղ $\lambda \in R$ և $\lambda > 0$, անհավասարությունը մնում է նույնը), հետևաբար, առանց ընդհանրությունը խախտելու, կարող ենք ենթադրել, որ $a+b+c=1 \Rightarrow a;b;c \in (0;1)$: Նկատենք, որ կամայական $x \in (0;1)$ իրական թվի համար ունենք՝ $\frac{4x^2-4x+1}{1-x} \geq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{1}{1-x} \geq 4x \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{1-x}} \geq 2x$, ընդ որում հավասարության դեպքը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $x = 1/2$, հետևաբար տրված ելակետային անհավասարության ձախ մասի համար կունենանք՝ $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}} =$

$=\sqrt{\frac{a}{1-a}}+\sqrt{\frac{b}{1-b}}+\sqrt{\frac{c}{1-c}}\geq 2\left(a+b+c\right)=2$, ընդ որում, հավասարության դեպքը կարող է տեղի ունենալ այն և միայն այն դեպքում, երբ $a=b=c=1/2$, բայց քանի որ a-ն, b-ն և c-ն չեն կարող միաժամանակ հավասար լինել $1/2$-ի, քանի որ $a+b+c=1$, կնշանակի՝ կունենանք խիստ անհավասարություն:

Անհավասարությունն ապացուցված է:

Օրինակ 95: Ապացուցել, որ կամայական a; b և c իրական դրական թվերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝ $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$:

Լուծում: Հեշտ է նկատել, որ տրված անհավասարությունը համասեռ է a; b և c փոփոխականների նկատմամբ, հետևաբար, առանց ընդհանրությունը խախտելու, կարող ենք ենթադրել, որ $a+b+c=1\Rightarrow a;b;c\in\left(0;1\right)$: Նկատենք, որ կամայական $x\in\left(0;1\right)$ իրական թվի համար ունենք՝ $\frac{x}{1-x}\geq\frac{9x-1}{4}$, ընդ որում, հավասարության դեպքը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $x=1/3$, հետևաբար տրված ելակետային անհավասարության ձախ մասի համար կունենանք՝

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c}{1-c}\geq\frac{9\left(a+b+c\right)-3}{4}=\frac{3}{2},$$

ընդ որում, հավասարության դեպքը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $a=b=c=1/3$:

Անհավասարությունն ապացուցված է:

Անհավասարությունների ապացուցում քառակուսային եռանդամի հատկությունների կիրառմամբ:

Հանդիպում են անհավասարություններ, որոնք նույնական ձևափոխություններից հետո կարելի է բերել մի քանի փոփոխականներ պարունակող $F\left(x_1;x_2;\cdots;x_n\right)\geq 0$ կամ $F\left(x_1;x_2;\cdots;x_n\right)>0$ տեսքի անհավասարությունների, որոնց ձախ մասերը փոփոխականներից մեկի նկատմամբ իրենցից ներկայացնում են քառակուսային եռանդամներ: Երբեմն այդ քառակուսային եռանդամների առանձին հատկությունները որոշիչ են դառնում ելակետային անհավասարությունների ապացուցման համար:

Վերոգրյալի համատեքստում դիտարկենք մի քանի օրինակներ:

Օրինակ 96: Ապացուցել, որ կամայական x և y իրական թվերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝ $x^2+2x\sin y+1+y^2>0$:

Լուծում: Հեշտ է նկատել, որ տրված անհավասարության ձախ մասն ըստ x-ի բերված տեսքի քառակուսային եռանդամ է, որի ավագ անդամի գործակիցը 1 է, իսկ դիսկրիմինանտը՝ $\dfrac{D}{4}=\sin^2 y-1-y^2=$ $=-\left(y^2+\cos^2 y\right)<0$, հետևաբար այդ եռանդամն ընդունում է միայն դրական արժեքներ և, ուրեմն, $x^2+2x\sin y+1+y^2>0$:

Անհավասարությունն ապացուցված է:

Օրինակ 97: Ապացուցել, որ կամայական x և y

իրական թվերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝ $x^2+2xy+3y^2+2x+6y+3\geq 0$:

Լուծում: Հեշտ է նկատել, որ տրված անհավասարության ձախ մասն ըստ x-ի բերված տեսքի քառակուսային եռանդամ է՝ $x^2+2(y+1)x+3(y+1)^2$, որի ավագ անդամի գործակիցը 1 է, իսկ դիսկրիմինանտը՝ $\frac{D}{4}=(y+1)^2-3\cdot(y+1)^2=-2\cdot(y+1)^2\leq 0,$ հետևաբար այդ եռանդամն ընդունում է ոչ բացասական արժեքներ և, ուրեմն, $x^2+2xy+3y^2+2x+6y+3\geq 0$, ընդ որում, հավասարության դեպքը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $\frac{D}{4}=-2\cdot(y+1)^2=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow x=0$:

Անհավասարությունն ապացուցված է:

Նշենք, որ օրինակ 68-ում և օրինակ 70-ում բերված անհավասարությունները ևս կարելի է ապացուցել քառակուսային եռանդամի հատկությունների կիրառմամբ:

Ստորև ներկայացնենք այդ անհավասարությունների ապացուցման այլ մոտեցումներ:

Օրինակ 98: Ապացուցել, որ կամայական a և b իրական թվերի համար տեղի ունի $a^2+b^2+1\geq ab+a+b$ անհավասարությունը:

Լուծում: Ունենք՝ $a^2+b^2+1\geq ab+a+b \Leftrightarrow a^2+b^2+1-$ $-(ab+a+b)\geq 0 \Leftrightarrow a^2-(b+1)a+b^2-b+1\geq 0$: Ստացված անհավասարության ձախ մասն ըստ a-ի բերված տեսքի քառակուսային եռանդամ է՝ $a^2-(b+1)a+b^2-b+1$, որի ավագ անդամի գործակիցը 1 է, իսկ դիսկրիմինանտը՝ $D=(b+1)^2-4\cdot\left(b^2-b+1\right)=-3\cdot(b-1)^2\leq 0,$ հետևաբար այդ եռանդամն ընդունում է ոչ բացասական արժեքներ և, ուրեմն, $a^2-(b+1)a+b^2-b+1\geq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2+1\geq ab+a+b,$ ընդ որում, հավասարության դեպքը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $D=-3\cdot(b-1)^2=0\Rightarrow b=1\Rightarrow a=1:$

Անհավասարությունն ապացուցված է:

Օրինակ 99: Ապացուցել, որ կամայական a և b իրական թվերի համար տեղի ունի $a^2+ab+b^2\geq 3(a+b-1)$ անհավասարությունը:

Լուծում: Ունենք՝ $a^2+ab+b^2\geq 3(a+b-1)\Leftrightarrow a^2+ab+$ $+b^2-3(a+b-1)\geq 0 \Leftrightarrow a^2+(b-3)a+b^2-3b+3\geq 0:$

Ստացված անհավասարության ձախ մասն ըստ a-ի բերված տեսքի քառակուսային եռանդամ է՝ $a^2+(b-3)a+b^2-3b+3\geq 0$, որի ավագ անդամի գործակիցը 1 է, իսկ դիսկրիմինանտը՝ $D=(b-3)^2-4\cdot\left(b^2-3b+3\right)=$ $=-3\cdot(b-1)^2\leq 0,$ հետևաբար այդ եռանդամն ընդունում է ոչ բացասական արժեքներ և, ուրեմն,

$$a^2+(b-3)a+b^2-3b+3\geq 0 \Leftrightarrow a^2+ab+b^2\geq 3(a+b-1),$$

ընդ որում, հավասարության դեպքը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $D=-3\cdot(b-1)^2=0\Rightarrow b=1\Rightarrow a=1:$

Անհավասարությունն ապացուցված է:

Երբեմն հանդիպում են նաև անհավասարություններ, որոնք ապացուցելիս մենք ինքներս ենք ներմուծում «հարմար» քառակուսային եռանդամ և վերջինիս արմատներ ունենալու և/կամ չունենալու հանգամանքն օգտագործում՝ ելակետային անհավասարությունն ապացուցելու համար: Այս համատեքստում դիտարկենք մեկ օրինակ:

Օրինակ 100: Ապացուցել, որ կամայական a; b և c իրական թվերի համար, եթե $a(a+b+c)<0$, ապա տեղի ունի $b^2>4ac$ անհավասարությունը:

Լուծում: Դիտարկենք $f(x)=cx^2+bx+a$ ֆունկցիան:

Երբ $c=0$, կունենանք՝ $a(a+b)<0 \Rightarrow b\neq 0 \Rightarrow b^2>0=$ $=4ac$:

Երբ $c\neq 0$, $f(x)$ քառակուսային եռանդամի համար կունենանք՝ $a(a+b+c)<0 \Leftrightarrow f(0)\cdot f(1)<0$, այսինքն՝ $f(x)$ քառակուսային եռանդամը $[0;1]$ հատվածի ծայրակետերում ընդունում է տարբեր նշանի արժեքներ, կնշանակի՝ $f(x)$ քառակուսային եռանդամն ունի երկու տարբեր արմատներ և, ուրեմն, վերջինիս դիսկրիմինանտը դրական է. $D=b^2-4ac>0 \Leftrightarrow b^2>4ac$:

Անհավասարությունն ապացուցված է:

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ապացուցման կամ հերքման խնդիրներ։

1. 2024x2024 չափանի քառակուսու յուրաքանչյուր վանդակ ներկված է 2023 գույներից որևէ մեկով։ Թույլատրվում է յուրաքանչյուր քայլում ցանկացած տող կամ սյուն նորից ներկել 2023 գույներից որևէ մեկով, եթե այդ տողի կամ սյան վրա կա տվյալ գույնի որևէ երկու վանդակ։ Ապացուցել, որ որոշակի քայլերից հետո հնարավոր է հասնել նրան, որ 2024x2024 չափանի քառակուսու բոլոր վանդակները լինեն միևնույն գույնի։
2. Շրջանաձև սեղանի վրա տեղադրված են թերթիկներ խորհրդակցության մասնակիցների ազգանուններով։ Երբ մասնակիցները նստեցին սեղանի շուրջ, պարզվեց, որ ոչ մի մասնակից չի նստել իր ազգանվան դիմաց։ Ապացուցել, որ հնարավոր է սեղանն իր կենտրոնի շուրջ պտտել այնպես, որ առնվազն երկու մասնակից նստած լինեն իրենց ազգանունների դիմաց։
3. Մեքենագրուհին տպագրեց պահանջվող տեքստը, որը կազմեց 25 էջ և կատարեց 101 սխալ։ Ապացուցել, որ կգտնվի էջ, որի վրա կլինեն 4-ից ավել սխալներ։
4. Տղան տոնական 3 օրերի ընթացքում գնեց 100 հուշանվեր։ Ապացուցել, տոնական օրերից որևէ մեկի ընթացքում տղան գնել է առնվազն 34

հուշանվեր։

5. 14 տղաներ հավաքեցին 100 խնձոր։ Ապացուցել, որ տղաներից առնվազն երկուսը հավաքել են միննույն թվով խնձորներ (պետք է ի նկատի ունենալ, որ յուրաքանչյուր տղա հավաքել է առնվազն մեկ խնձոր)։
6. Հարթության վրա տարված են թվով 9 կամայական ուղիղներ, որոնցից ոչ մի երկուսը միմյանց զուգահեռ չեն։ Ապացուցել, որ այդ ուղիղների մեջ կգտնվեն այնպիսի երկուսը, որոնց կազմած անկյունը չի գերազանցում 20^0-ը։
7. Տրված են 2025 հատ իրական թվեր։ Հայտնի է, որ այդ թվերից ցանկացած 2-ի գումարը մեծ է 1-ից։ Ապացուցել, որ բոլոր 2025 հատ թվերի գումարը մեծ է 1012,5-ից։
8. Տրված են 2025 հատ իրական թվեր։ Հայտնի է, որ այդ թվերից ցանկացած 7-ի արտադրյալը մեծ է 1-ից։ Ապացուցել, որ բոլոր 2025 հատ թվերի արտադրյալը մեծ է 1-ից։
9. Ծաղկեփունջը կազմված է 9 վարդերից, որոնք միասին ունեն 190 տերևներ։ Ապացուցել, որ կարելի է ընտրել 4 վարդ, որոնք միասին կունենան 84-ից ավել տերևներ։
10. Շենքի 123 բնակչի գումարային տարիքը 3813 է։ Ապացուցել, որ հնարավոր է ընտրել այնպիսի 100 բնակիչ, որոնց գումարային տարիքը փոքր է 3100-ից։

11. Ունենք բեռ, որը կշռում է 250կգ, լծակավոր կշեռք և 1կգ-անոց, 3կգ-անոց, 5կգ-անոց, 7կգ-անոց կշռաքարեր: Հնարավո՞ր է արդյոք բեռը կշռել, եթե լծակավոր կշեռքի նժարին թույլատրվում է տեղադրել ճիշտ 10 հատ կշռաքար:
12. Մորեխը ցատկոտում է հորիզոնական ուղղի երկայնքով՝ աջ կամ ձախ, ընդ որում առաջին ցատկի երկարությունը 1սմ է, երկրորդ ցատկի երկարությունը՝ 2սմ, երրորդ ցատկի երկարությունը՝ 3սմ, և այլն, n-րդ ցատկի երկարությունը՝ n սմ: Հնարավո՞ր է արդյոք, որ 2025 թռիչքներից հետո մորեխը հայտնվի իր սկզբնական դիրքում:
13. Երեք մորեխներ գտնվում են հորիզոնական ուղղի վրա: Յուրաքանչյուր քայլում մորեխներից մեկը ցատկոտում է աջ կամ ձախ (մնալով ուղղի վրա)՝ մյուս մորեխներից միայն մեկի վրայով (ոչ երկուսի): Հնարավո՞ր է արդյոք 2023 ցատկերից հետո մորեխները ուղղի վրա ունենան նույն սկզբնական դասավորությունը:
14. Սեղանին դրված են շրջված 9 բաժակներ: Յուրաքանչյուր քայլում թույլատրվում է շրջել որևէ երկու բաժակ: Հնարավո՞ր է արդյոք որոշակի քայլերից հետո սեղանի վրա եղած բոլոր բաժակները լինեն բնական դիրքով (ոչ շրջված):
15. Շարքով (կողք կողքի) գրված են 1-ից մինչև 2024 բոլոր բնական թվերը: Հնարավո՞ր է արդյոք նրանց

միջև (յուրաքանչյուր երկու հարևան թվերի միջև) ավելացնել գումարման կամ հանման գործողություններ այնպես, որ ստացված թվային արտահայտության արժեքը հավասար լինի 2025-ի:

16. Գրատախտակին գրված են 1; 2; 3; …; 100; 101 բնական թվերը: Յուրաքանչյուր քայլում թույլատրվում է ջնջել այդ թվերից ցանկացած երկուսը և փոխարենն ավելացնել ջնջված թվերից մեծի և փոքրի տարբերությունը: Ապացուցել, որ 100 քայլերից հետո գրատախտակին չենք կարող ստանալ 100:

17. Շարքով (կողք կողքի) գրված են 1-ից մինչև 100 բոլոր բնական թվերը: Յուրաքանչյուր քայլում թույլատրվում է տեղերով փոխել ընդհանուր «հարևան» ունեցող որևէ երկու բնական թիվ: Հնարավո՞ր է արդյոք որոշակի քայլերից հետո շարքով ստանալ նվազման կարգով դասավորված 100-ից մինչև 1 բնական թվերը:

18. Տրված է շախմատային տախտակ: Յուրաքանչյուր քայլում թույլատրվում է փոխել որևէ տողի կամ որևէ սյան վանդակների գույները: Հնարավո՞ր է արդյոք որոշակի քայլերից հետո տախտակի վրա ունենալ միայն մեկ սպիտակ վանդակ:

19. Գրատախտակին գրված է 18 թիվը: Յուրաքանչյուր քայլում թույլատրվում է գրատախտակին եղած թիվը կա՛մ բազմապատկել 4-ով, կա՛մ բաժանել 4-ի վրա, կա՛մ բազմապատկել 9-ով, կա՛մ բաժանել 9-ի

վրա: Հնարավո՞ր է արդյոք 2024 քայլերից հետո գրատախտակին ստանալ 24:

20. Գրատախտակին գրված են n հատ իրական դրական թվեր: Յուրաքանչյուր քայլում թույլատրվում է ջնջել որևէ երկու a և b թվեր և նրանց փոխարեն գրել (a+b)/4 թիվը: Ապացուցել, որ եթե սկզբում գրատախտակին գրված են եղել n հատ 1-եր, ապա (n-1) քայլերից հետո գրատախտակին կլինի 1/n-ից ոչ փոքր թիվ:
21. Ձին գտնվում է շախմատային տախտակի a1 դաշտում: Հնարավո՞ր է արդյոք ձիով անցնել շախմատային տախտակի բոլոր վանդակներով՝ յուրաքանչյուրում գտնվելով միայն մեկ անգամ և վերջում հայտնվել h8 դաշտում:
22. Ձին գտնվում է անվերջ քառակուսային տախտակի որևէ դաշտում-վանդակում: Հնարավո՞ր է արդյոք 2023 քայլերից հետո ձին վերադառնա իր սկզբնական դիրքը:
23. Ձին գտնվում է 9x9 չափսերի քառակուսային տախտակի որևէ դաշտում-վանդակում: Հնարավո՞ր է արդյոք ձիով անցնել քառակուսային տախտակի մյուս բոլոր վանդակներով՝ յուրաքանչյուրում գտնվելով միայն մեկ անգամ և վերադառնալ սկզբնական դիրք:
24. Թագավորը գտնվում է շախմատային տախտակի a1 դաշտում: Անցնելով շախմատային տախտակի մյուս բոլոր վանդակներով, յուրաքանչյուրում

գտնվելով միայն մեկ անգամ, թագավորը վերադարձավ իր սկզբնական դիրքը: Ապացուցել, որ թագավորի կատարած անկյունագծային քայլերի քանակը զույգ է (մասնավորաբար, նաև 0):

25. 9x9 չափերի քառակուսային ցանցի յուրաքանչյուր վանդակում նստած է մեկ մորեխ: Կրակոցից հետո յուրաքանչյուր մորեխ տեղափոխվում է հարևան անկյունագծային որևէ վանդակ: Ապացուցել, որ կրակոցից հետո վանդակներից առնվազն 9-ում մորեխ չի լինի:

26. Հնարավո՞ր է արդյոք 13 հատ 1x1x2 չափերի աղյուսների միջոցով կառուցել 3x3x3 չափերի խորանարդ՝ առանց կենտրոնական 1x1x1 չափերի փոքր խորանարդի:

27. 7x7 չափերի քառակուսին, որից հեռացված է անկյունային վանդակներից մեկը, հնարավո՞ր է արդյոք ծածկել 12 հատ «Г»-աձև պատկերներով, որոնք կազմված են չորս հատ 1x1 չափերի քառակուսիներից:

28. 8x8 չափերի քառակուսին, որից հեռացված է անկյունային վանդակներից մեկը, հնարավո՞ր է արդյոք ծածկել 21 հատ 1x3 չափերի ուղղանկյուններով:

29. 10x10 չափերի քառակուսին հնարավո՞ր է արդյոք ծածկել 25 հատ 1x4 չափերի ուղղանկյուններով:

30. 6x6 չափերի քառակուսին հնարավո՞ր է արդյոք ծածկել 9 հատ 1x4 չափերի ուղղանկյուններով:

31. Մայրն իր 7 որդիների համար գնեց 7 տարբեր չափերի թմբուկներ և 7 զույգ համապատասխան փայտիկներ (տարբեր չափերի): Որդիներն ուզած ձևով ընտրեցին թմբուկներ և փայտիկներ: Յուրաքանչյուր որդի, տեսնելով, որ իր և՛ թմբուկն է մեծ եղբայրներից որևէ մեկի թմբուկից, և՛ փայտիկներն են երկար եղբայրներից որևէ մեկի փայտիկներից, սկսում է թմբկահարել: Պարզել, առավելագույնը քանի՞ եղբայր կարող է թմբկահարել:
32. Հորիզոնական ուղղի վրա նշված են որոշակի քանակությամբ կետեր այնպես, որ յուրաքանչյուր կետ հանդիսանում է նշված որևէ երկու կետով որոշվող հատվածի միջնակետ: Ապացուցել, որ նշված կետերի քանակն անվերջ է:
33. Հարթության վրա նշված են որոշակի քանակությամբ կետեր այնպես, որ յուրաքանչյուր կետ հանդիսանում է նշված որևէ երկու կետով որոշվող հատվածի միջնակետ: Ապացուցել, որ նշված կետերի քանակն անվերջ է:
34. Շրջանագծով դասավորված են մի քանի բնական թվեր (առնվազն երեք), որոնցից յուրաքանչյուրը չի գերազանցում իր հարևաններից որևէ մեկին: Ապացուցել, որ այդ թվերի մեջ կգտնվեն առնվազն երկուսը՝ միմյանց հավասար:
35. 8 ընկերներ միասին հավաքեցին 37 հատ սունկ, ընդ որում ոչ մի երկուսը չեն հավաքել միևնույն

քանակությամբ սունկ, և յուրաքանչյուրը հավաքել է առնվազն մեկ սունկ։ Ապացուցել, որ ընկերներից որևէ երկուսը հավաքել են ավելի շատ սունկ, քան որևէ հինգը միասին։

36. Շախմատային տախտակի վրա տեղադրված են մի քանի նավակներ (առնվազն երեք)։ Ապացուցել, որ կգտնվի նավակ, որը կհարվածի առավելագույնը երկու նավակի։

37. Գալակտիկայում կա 2023 աստղ, որոնցից յուրաքանչյուրի վրա կա մեկ աստղագետ։ Հայտնի է, որ աստղերի միջև եղած հեռավորությունները միմյանցից տարբեր են, և յուրաքանչյուր աստղագետ հետևում է ամենամոտ գտնվող աստղին։ Ապացուցել, որ կա աստղ, որին ոչ մի աստղագետ չի հետևում։

38. Շրջանագծով դասավորված են մի քանի դրական իրական թվեր (առնվազն երեք), որոնցից յուրաքանչյուրը հավասար է իր հարևանների միջին երկրաչափականին։ Ապացուցել, որ բոլոր թվերը միմյանց հավասար են։

39. Հարթության վրա նշված են n հատ կետեր ($n \geq 3$) այնպես, որ այդ կետերից ցանկացած երկուսով անցնող ուղղին պատկանում է այդ կետերից առնվազն ևս մեկը։ Ապացուցել, որ բոլոր կետերը պատկանում են միևնույն ուղղին։

40. nxn չափսերի քառակուսային տախտակի վանդակներում տեղադրված են որոշակի

քանակությամբ նավակներ այնպես, որ ցանկացած դատարկ վանդակն ընդգրկող տողի և սյան վրա կան առնվազն n հատ նավակներ: Ապացուցել, որ nxn չափսերի քառակուսային տախտակի վանդակներում տեղադրված են առնվազն $n^2/2$ հատ նավակներ:

Դիոֆանտյան (անորոշ) հավասարումներ:

N41-86 առաջադրանքներում անհրաժեշտ է գտնել անորոշ հավասարման ամբողջ լուծումները (եթե այլ բան նշված չէ առաջադրանքի պահանջում):

41. $37x+5y=232$:
42. $19x-15y=-1$:
43. $23x-17y=11$:
44. $53x-47y=11$:
45. $3x+4y+5z=6$:
46. $6x+10y-15z=1$:
47. $(2x+y)(5x+3y)=7$:
48. $x^2=14+y^2$:
49. $xy=x+y+3$:
50. $x^2-3xy+2y^2=7$:
51. $(xy-7)^2=x^2+y^2$:
52. $x^2(y-1)+ y^2(x-1)=1$:
53. $x^6+3x^3+1=y^4$:
54. $x^2+6xy+8y^2+3x+6y=2$:
55. $6x^2+5y^2=74$:
56. $x^2-7y=10$:
57. $x^2-3y^2=8$:
58. $x^2+y^2=x+y+2$:

59. $x^3-21y^2+5=0$:
60. $15x^2-7y^2=9$:
61. $18x^2+29y^2=629$:
62. $x^2+y^2=9x+1$:
63. $x^2+4x-8y=11$:
64. $x^2+y^2+z^2=8t-1$:
65. $x^2+2=2y(y+1)$:
66. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{50}$:
67. $1!+2!+\cdots+x!=y^2 \quad (x\in N;\ y\in Z)$:
68. $\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}=3$:
69. $x^2-xy+y^2=x+y$:
70. $x^3-2y^3-4z^3=0$:
71. $x^2+y^2+z^2=2xyz$:
72. $x^4+4y^4=2(z^2+4t^4)$:
73. $x^2+y^2+z^2=x^2y^2$:
74. $x_1^4+x_2^4+\cdots+x_{14}^4=1599$:
75. $x^3+y^3=4(x^2y+xy^2+1)$:
76. $x^5-y^5=1993$:
77. $x^3+y^3=(x+y)^2$:
78. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{5} \quad (x;y;z\in N)$:
79. $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=2 \quad (x;y;z\in N)$:
80. $3(xy+yz+zx)=4xyz \quad (x;y;z\in N)$:
81. $(x+1)^2+(x+2)^2+\cdots+(x+2001)^2=y^2$:
82. $(x+y)^2+3x+y+1=z^2 \quad (x;y;z\in N)$:
83. $(x+1)^4-(x-1)^4=y^3$:

84. $x^2y+y^2z+z^2x=3xyz \quad (x;y;z\in N)$:

85. $xy(z+1)=(x+1)(y+1)z$:

86. $x^2+xy=y^2+xz$:

87. Ապացուցել, որ $x^2=y^3+z^5$ հավասարումն ունի անթիվ բազմությամբ բնական լուծումներ:

88. Ապացուցել, որ $x^3+y^3+z^3+t^3=2008$ հավասարումն ունի անթիվ բազմությամբ ամբողջ լուծումներ:

89. Ապացուցել, որ $x^4+y^4+z^4=2002^t$ հավասարումն ունի անթիվ բազմությամբ բնական լուծումներ:

90. Ապացուցել, որ $x^3+y^3+z^3=x^2+y^2+z^2$ հավասարումն ունի անթիվ բազմությամբ ամբողջ լուծումներ:

Վերջավոր գումարներ:

N91-105 առաջադրանքներում անհրաժեշտ է հաշվել տրված վերջավոր գումարը:

91. $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{99}$ (չօգտվե՛լ երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարի բանաձևից):

92. $1+3+3^2+3^3+\cdots+3^{99}$ (չօգտվե՛լ երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարի բանաձևից):

93. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$:

94. $2^3+4^3+6^3+\cdots+(2n)^3$:

95. $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3$:

96. $2^2+4^2+6^2+\dots+(2n)^2$:

97. $1^2+3^2+5^2+\dots+(2n-1)^2$:

98. $2\cdot1^2+3\cdot2^2+4\cdot3^2+\dots+(n+1)\cdot n^2$:

99. $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\dots+n(n+1)(n+2)$:

100. $\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\dots+\frac{1}{397\cdot401}$:

101. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5\cdot6}+\dots+\frac{1}{99\cdot100\cdot101}$:

102. $\frac{1}{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k}+\frac{1}{a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_{k+1}}+\dots+\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}\cdot\ldots\cdot a_{n+k-1}}$,
որտեղ $\{a_n\}$ -ը d տարբերությամբ թվաբանական պրոգրեսիա է և $k\geq2$:

103. $\frac{1}{1+\sqrt3}+\frac{1}{\sqrt3+\sqrt5}+\frac{1}{\sqrt5+\sqrt7}+\dots+\frac{1}{\sqrt{199}+\sqrt{201}}$:

104. $\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\dots+\sin(\alpha+n\beta)$:

105. $\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\dots+\cos(\alpha+n\beta)$:

Իրական թվի ամբողջ կամ կոտորակային մաս պարունակող արտահայտություններ, հավասարություններ, հավասարումներ և անհավասարումներ:

106. Հաշվել $[2x]$-ը, եթե $[x]=\underbrace{55\ldots5}_{100}$:

107. Հաշվել $\{2x\}$ -ը, եթե $\{x\}=0,\underbrace{55\ldots5}_{100}$:

108. Ապացուցել, որ եթե $\alpha=\frac{1+\sqrt5}{2}$, ապա $\{\alpha\}=\frac{1}{\alpha}$:

109. Համեմատել՝ $\left\{\frac{1}{4}\right\}$ և $\left\{-\frac{1}{4}\right\}$:

110. Համեմատել՝ $\left\{\sqrt{13}\right\}$ և $\left\{-\sqrt{13}\right\}$:

111. Համեմատել՝ $\left\{\sqrt{19}\right\}$ և $\left\{-\sqrt{19}\right\}$:

112. Համեմատել՝ $\left\{2\sin\frac{\pi}{5}\right\}$ և $\left\{2\sin\frac{2\pi}{5}\right\}$:

113. Պարզեցնել $\left\{\frac{n^3-n}{6}\right\}$ արտահայտությունը, որտեղ $n\in Z$:

114. Պարզեցնել հետևյալ արտահայտությունը՝ $\left[\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right]$, որտեղ $n\in N$:

115. Պարզեցնել հետևյալ արտահայտությունը՝ $\left[\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)}\right]$, որտեղ $n\in N$:

116. Ապացուցել, որ ցանկացած $n\in N$ բնական թվի դեպքում տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝ $\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left[\frac{n+1}{2}\right]=\left[\frac{n^2}{4}\right]$:

117. Լուծել հավասարումը՝ $\left\{2024^x\right\}=2024^{\{x\}}$:

118. Ապացուցել, որ $\{x\}=\{y\}\Leftrightarrow\{x-y\}=0$:

119. Ապացուցել, որ $[x]+[-x]=0$, երբ $x\in Z$ և $[x]+[-x]=-1$, երբ $x\notin Z$:

120. Ապացուցել, որ $\{x\}+\{-x\}=0$, երբ $x\in Z$ և

$\{x\}+\{-x\}=1$, երբ $x\notin Z$:

121. Ապացուցել, որ $x\leq y\Rightarrow [x]\leq [y]$:

122. Ապացուցել, որ եթե $\exists n\in N|x;y\in [n;n+1)$, ապա $x<y\Leftrightarrow \{x\}<\{y\}$:

123. Ապացուցել, որ.
$[x]=n\Leftrightarrow n\leq x<n+1\Leftrightarrow x-1<n\leq x \quad (n\in N;x\in R)$:

124. Ապացուցել, որ.
$[x]>n\Leftrightarrow [x]\geq n+1\Leftrightarrow x\geq n+1 \quad (n\in N;x\in R)$:

125. Ապացուցել, որ.
$[x]\leq n\Leftrightarrow [x]<n+1\Leftrightarrow x<n+1 \quad (n\in N;x\in R)$:

126. Ապացուցել, որ $n[x]\leq [nx]$, որտեղ $n\in N;x\in R$:

127. Ապացուցել, որ $n\{x\}\geq \{nx\}$, որտեղ $n\in N;x\in R$:

128. Ապացուցել, որ $n[x]=[nx]\Leftrightarrow \{x\}<\dfrac{1}{n}$, որտեղ $n\in N;x\in R$:

129. Ապացուցել, որ $\{n\{x\}\}=\{nx\}$, որտեղ $n\in Z;x\in R$:

130. Ապացուցել, որ ցանկացած n բնական թվի դեպքում տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝
$$\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n+2}{6}\right]+\left[\frac{n+4}{6}\right]=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+3}{6}\right]:$$

131. Ապացուցել, որ ցանկացած n բնական թվի դեպքում տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝
$$\left[\frac{3n+8}{25}\right]=\left[\frac{n+2}{25}\right]+\left[\frac{n+11}{25}\right]+\left[\frac{n+19}{25}\right]:$$

132. Ապացուցել, որ ցանկացած n բնական թվի դեպքում տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝ $\left\{\sqrt{4n^2+n}\right\} < \frac{1}{4}$:

133. Լուծել հավասարումը՝ $x = \{x\}$:

134. Լուծել հավասարումը՝ $x = [x]$:

135. Լուծել հավասարումը՝ $[x] = \{x\}$:

136. Լուծել հավասարումը՝ $2[x] + \{x\} = 4,25$:

137. Լուծել հավասարումը՝ $2[x] + \{x\} = -3,7$:

138. Լուծել հավասարումը՝ $2[x] + \{x\} = 7,7$:

139. Լուծել հավասարումը՝ $4[x] + 3\{x\} = 2x - \frac{5}{3}$:

140. Լուծել հավասարումը՝ $x = \{32x\}$:

141. Լուծել հավասարումը՝ $\left\{4\left\{\frac{x}{2}\right\}\right\} = 2x + 1$:

142. Լուծել հավասարումը՝ $[2x] = 2[x]$:

143. Լուծել հավասարումը՝ $x + \left[\frac{x}{6}\right] = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{2x}{3}\right]$:

144. Լուծել հավասարումը՝ $2x = \{x\}$:

145. Լուծել հավասարումը՝ $3x = 2[x]$:

146. Լուծել հավասարումը՝ $x = \{2x\}$:

147. Լուծել հավասարումը՝ $\left[\frac{x^2 - x + 2}{4}\right] = 1$:

148. Լուծել հավասարումը՝ $\left\{2^{x-1}\right\}=\frac{1}{2}$:

149. Լուծել հավասարումը՝ $2^{\{x\}}=\frac{3}{2}$:

150. Լուծել անհավասարումը՝ $\left[x^2-\frac{1}{4}\right]<\frac{11}{2}$:

151. Լուծել անհավասարումը՝ $[x]+2\{x\}<1,3$:

152. Լուծել անհավասարումը՝ $x^2\leq[2x]\cdot\{2x\}$:

153. Լուծել անհավասարումը՝ $\{\sin x\}>3/4$, երբ $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$:

154. Լուծել անհավասարումը՝ $[x]^2\cdot\{x\}<1$:

155. Լուծել անհավասարումը՝ $\frac{\{x\}^2}{\{x\}-1}\geq x$:

Անհավասարություններ:

156. Ապացուցել, որ եթե $a>1$ և $b<1$, ապա $a+b>1+ab$:

157. Ապացուցել, որ եթե $a>c$ և $b<c$, ապա $a^2+b^2>$ $>c^2+(a+b-c)^2$:

158. Ապացուցել, որ կամայական a և b իրական դրական թվերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝ $\frac{1}{2}\cdot(a+b)+\frac{1}{4}\geq\sqrt{\frac{a+b}{2}}$:

159. Ապացուցել, որ եթե $x\leq a$ և $y\geq a$, ապա $a(x+y-a)\geq xy$:

160. Ապացուցել, որ եթե $0<a;b\le\frac{1}{2}$, ապա $\left(\frac{2}{a+b}-1\right)^2\le$ $\le\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)$:

161. Ապացուցել, որ կամայական a և b իրական դրական թվերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝ $\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}$:

162. Ապացուցել, որ եթե $xy+yz+zx=1$, ապա $x^2+y^2+z^2\ge1$:

163. Ապացուցել, որ կամայական x իրական թվի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝ $2x^4+1\ge2x^3+x^2$:

164. Ապացուցել, որ եթե $a;b;c>0$ և $abc=1$, ապա $2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$:

165. Ապացուցել, որ եթե $a;b;c$-ն որևէ եռանկյան կողմեր են, ապա $2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\ge a^4+b^4+c^4$:

166. Ապացուցել, որ եթե $a;b;c>0$, ապա $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$:

167. Ապացուցել, որ եթե $a;b;c>0$, ապա $abc\ge(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$:

168. Ապացուցել, որ եթե $x+y=1$, ապա $x^8+y^8\ge1/128$:

169. Ապացուցել, որ եթե $a;b>0$ և $a+b=1$, ապա

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geq\frac{25}{2}:$$

170. Ապացուցել, որ կամայական $a;b$ և c իրական դրական թվերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝ $a^4+b^4+c^4\geq abc\left(a+b+c\right)$:

171. Ապացուցել, որ եթե $xy\in R$ և $xy=1$, ապա $x^2+y^2\geq$ $\geq 2\sqrt{2}\left(x-y\right)$:

172. Ապացուցել, որ եթե $a_1;a_2;a_3;a_4;a_5>0$ և $a_1+a_2+a_3+$ $+a_4+a_5=1$, ապա $\sqrt{6a_1+1}+\sqrt{6a_2+1}+\sqrt{6a_3+1}+$ $+\sqrt{6a_3+1}+\sqrt{6a_4+1}+\sqrt{6a_5+1}\leq\sqrt{55}$:

173. Ապացուցել, որ եթե $a;b;c\geq 0$, ապա $6a+4b+5c\geq 5\sqrt{ab}+7\sqrt{ac}+3\sqrt{bc}$:

174. Ապացուցել, որ կամայական n բնական թվի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$:

175. Ապացուցել, որ կամայական n բնական թվի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$:

176. Ապացուցել, որ եթե $a;b;c\in\left(0;1\right)$, ապա $\sqrt{abc}+\sqrt{\left(1-a\right)\left(1-b\right)\left(1-c\right)}<1$:

177. Ապացուցել, որ եթե $a;b;c>0$, ապա

$$\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}:$$

178. Ապացուցել, որ կամայական x և y իրական թվերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝ $x^4+y^4\ge x^3y+xy^3$:

179. Ապացուցել, որ եթե $0<\alpha<\pi/2$, ապա $\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)>5$:

180. Ապացուցել, որ եթե $x;y;z\in R$ և $xyz\ne0$, ապա $\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)\ge9$:

181. Ապացուցել, որ կամայական a և b իրական թվերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝ $a^2\left(1+b^4\right)+b^2\left(1+a^4\right)\le\left(1+a^4\right)\left(1+b^4\right)$:

182. Ապացուցել, որ եթե $a;b;c>0$ և $a+b+c=1$, ապա $a^3+b^3+c^3\ge\frac{1}{9}$:

183. Ապացուցել, որ եթե $0\le a\le2$ և $0\le b\le3$, ապա $4\le a^2+b^2+ab+\sqrt{4-a^2}\cdot\sqrt{9-b^2}\le19$:

184. Ապացուցել, որ եթե $a;b;c\in R$ և $a;b>c>0$, ապա $\sqrt{c\left(a-c\right)}+\sqrt{c\left(b-c\right)}\le\sqrt{ab}$:

185. Ապացուցել, որ կամայական $a;b$ և c իրական թվերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\frac{|a-b|}{\sqrt{1+a^2}\cdot\sqrt{1+b^2}}\le\frac{|a-c|}{\sqrt{1+a^2}\cdot\sqrt{1+c^2}}+\frac{|b-c|}{\sqrt{1+b^2}\cdot\sqrt{1+c^2}}:$$

186. Ապացուցել, որ եթե $n>1$ և $n\in N$, ապա $\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+n}\ge\frac{11}{30}:$

187. Ապացուցել, որ եթե $n\in N;\ a\in R$ և $a>0$, ապա $\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{n}\le\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}:$

188. Ապացուցել, որ կամայական $x_1;x_2;\cdots;x_n$ իրական թվերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝ $\left|\sin\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)\right|\le$ $\le\left|\sin x_1\right|+\left|\sin x_2\right|+\cdots+\left|\sin x_n\right|:$

189. Ապացուցել, որ եթե $n\in N$, ապա $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln\left(n+1\right):$

190. Ապացուցել, որ եթե $n\in N$, ապա $1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n}}\le3-\frac{2}{\sqrt{n}}:$

191. Ապացուցել, որ եթե $a_i;b_i;c_i>0\ \left(i=\overline{1;n};\ n\in N\right)$, ապա $\left(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+\cdots+a_nb_nc_n\right)^3\le$ $\le\left(a_1^3+a_2^3+\cdots a_n^3\right)\left(b_1^3+b_2^3+\cdots b_n^3\right)\left(c_1^3+c_2^3+\cdots c_n^3\right):$

192. Ապացուցել, որ եթե $a_i;b_i\in R^+\ \left(i=\overline{1;n};\ n\in N\right)$, ապա

$$\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)^2\le\left(a_1^2+a_2^2+\cdots a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots b_n^2\right):$$

193. Ապացուցել, որ եթե $a;b\in R^+$ և $n\in N$, ապա

$\left(a+b\right)^2\left(a^2+b^2\right)^2\cdot\ldots\cdot\left(a^n+b^n\right)^2\geq\left(a^{n+1}+b^{n+1}\right)^n$:

194. Ապացուցել, որ եթե $a;b;c;d\in R^+$ և $n\in N$, ապա $\sqrt{\frac{a}{b+c+d}}+\sqrt{\frac{b}{c+d+a}}+\sqrt{\frac{c}{d+a+b}}+\sqrt{\frac{d}{a+b+c}}>2$:

195. Ապացուցել, որ եթե $a;b;c;d\geq 0$, ապա $a^4+b^4+c^4+$ $+d^4+2abcd\geq a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2$:

196. Ապացուցել, որ եթե $a;b;c$ -ն որևէ եռանկյան կողմերի երկարություններն են, ապա $a^2\left(b+c-a\right)+b^2\left(c+a-b\right)+c^2\left(a+b-c\right)\leq 3abc$:

197. $a_1;b_1;c_1;a_2;b_2;c_2$ իրական դրական թվերը բավարարում են $b_1^2\leq 4a_1c_1$ և $b_2^2\leq 4a_2c_2$ անհավասարություններին: Ապացուցել, որ $4\left(a_1+a_2+7\right)\left(c_1+c_2+2\right)>\left(b_1+b_2+1\right)$:

198. Ապացուցել, որ եթե $a;b;c\in R$ և $a>c>b$, ապա $a^2+b^2>c^2+\left(a+b-c\right)^2$:

199. Ապացուցել, որ եթե $a;x;y\in R$ և $x\leq a\leq y$, ապա $a\left(x+y-a\right)\geq xy$:

200. Ապացուցել, որ կամայական a; b; c իրական թվերի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝ $\left(a+b+c\right)^2\leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$:

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ ԵՎ/ԿԱՄ ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ

1. ***<u>Ցուցում</u>***՝ օգտվելով Դիրիխլեի սկզբունքից՝ նախապես ապացուցել, որ հնարավոր է հասնել նրան, որ բոլոր տողերը (կամ սյուները) լինեն միատեսակ ներկված:
2. ***<u>Ցուցում</u>***՝ n թվաքանակով մասնակիցներին դիտարկել որպես n-անկյուն բազմանկյան գագաթներ և ի նկատի ունենալ, որ կա պտույտի n-1 հնարավորություն, ըստ այդմ օգտվել Դիրիխլեի սկզբունքից:
3. ***<u>Ցուցում</u>***՝ օգտվել հակասող ենթադրության մեթոդից և/կամ Դիրիխլեի ընդհանրացված սկզբունքից:
4. ***<u>Ցուցում</u>***՝ օգտվել հակասող ենթադրության մեթոդից և/կամ Դիրիխլեի ընդհանրացված սկզբունքից:
5. ***<u>Ցուցում</u>***՝ օգտվել պնդում 3-ից:
6. ***<u>Ցուցում</u>***՝ հարթության որևէ կետով տանել այդ ուղիղներին զուգահեռ ուղիղներ և օգտվել պնդում 4-ից:
7. ***<u>Ցուցում</u>***՝ օգտվել պնդում 5-ից:
8. ***<u>Ցուցում</u>***՝ նախ ապացուցել, որ բոլոր թվերը դրական են, որից հետո դիտարկել նոր 2025 հատ իրական թվեր՝ տրված թվերի բնական լոգարիթմները և, օգտվելով պնդում 6-ից, ապացուցել, որ այդ նոր թվերի մեջ կգտնվեն այնպիսի երկուսը, որոնց արտադրյալը դրական է:
9. ***<u>Ցուցում</u>***՝ օգտվել պնդում 7-ից:

10. ***Ցուցում***՝ օգտվել պնդում 7-ից:
11. ***Ցուցում***՝ նկատել, որ զույգ քանակով կենտ թվերի գումարի զույգությունն ինվարիանտ է:
12. ***Պատ․***՝ ո՛չ, հնարավոր չէ:
    Ցուցում՝ նկատել, որ կենտ քանակով կենտ թվերի գումարի զույգությունն ինվարիանտ է:
13. ***Պատ․***՝ ո՛չ, հնարավոր չէ:
    Ցուցում՝ մորեխները նշանակել A; B; C-ով և դիտարկել երկու խումբ դասավորություններ՝ A-B-C; B-C-A; C-A-B և B-A-C; C-B-A; A-C-B:
14. ***Ցուցում***՝ նկատել, որ ցանկացած քայլից հետո ուղիղ դիրքով բաժակների քանակի զույգությունն ինվարիանտ է:
15. ***Պատ․***՝ ո՛չ, հնարավոր չէ:
16. ***Ցուցում***՝ նկատել, որ ցանկացած քայլից հետո գրատախտակին մնացած թվերի գումարի զույգությունն ինվարիանտ է:
17. ***Ցուցում***՝ թվերի դիրքերը համարակալել և նկատել, որ ցանկացած քայլից հետո յուրաքանչյուր թվի զբաղեցրած դիրքի կարգահամարի զույգությունը մնում է ինվարիանտ:
18. ***Ցուցում***՝ նկատել, որ ցանկացած քայլից հետո սպիտակ վանդակների քանակի զույգությունը մնում է ինվարիանտ:
19. ***Ցուցում***՝ նկատել, որ ցանկացած քայլից հետո գրատախտակին կլինի $2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}$ $\left(\alpha;\beta\in Z\right)$ տեսքի թիվ,

ընդ որում $|\alpha|+|\beta|$ գումարի զույգությունը մնում է ինվարիանտ։

20. ***Ցուցում՝*** քանի որ $1/a+1/b \geq 4/(a+b)$, ապացուցել, որ գրատախտակին եղած թվերի հակադարձների գումարի փոփոխման դինամիկան մնում է անփոփոխ՝ չի աճում։

21. ***Պատ.*** ո՛չ, հնարավոր չէ։

Ցուցում՝ նկատել, որ յուրաքանչյուր քայլում ձին կա՛մ սպիտակ գույնի վանդակից հայտնվում է սև գույնի վանդակում, կա՛մ հակառակը։

22. ***Պատ.*** ո՛չ, հնարավոր չէ։

23. ***Պատ.*** ո՛չ, հնարավոր չէ։

24. ***Ցուցում՝*** նկատել, որ անկյունագծային յուրաքանչյուր քայլի դեպքում թագավորի զբաղեցրած վանդակի գույնը չի փոխվում։

25. ***Ցուցում՝*** քառակուսային ցանցն ըստ տողերի (կամ սյուների) մեկընդմեջ ներկել սև և սպիտակ գույներով (օրինակ՝ ստորին տողը՝ սև, հաջորդ տողը՝ սպիտակ, հաջորդ տողը՝ սև, հաջորդ տողը՝ սպիտակ և այդպես շարունակ)։

26. ***Ցուցում՝*** 3x3x3 չափսերի մեծ խորանարդի 1x1x1 չափսերի բոլոր փոքր խորանարդները ներկել շախմատաձև՝ սև-սպիտակ գույներով։

27. ***Ցուցում՝*** ելակետային քառակուսային ցանցը ներկել երեք գույներով այնպես, որ 1x3 չափսերի յուրաքանչյուր ուղղանկյան մեջ լինեն վանդակներ բոլոր երեք գույներից։

28. ***Ցուցում*** ելակետային քառակուսային ցանցն ըստ տողերի (կամ սյուների) մեկընդմեջ ներկել սև և սպիտակ գույներով (օրինակ՝ ստորին տողը՝ սև, հաջորդ տողը՝ սպիտակ, հաջորդ տողը՝ սև, հաջորդ տողը՝ սպիտակ և այդպես շարունակ):
29. ***Ցուցում*** 10x10 չափսերի քառակուսին ներկել շախմատաձև սև-սպիտակ գույներով՝ ըստ 2x2 չափսերի փոքր քառակուսիների, մասնավորաբար, ստորին ձախ 2x2 չափսերի փոքր քառակուսին ներկել սև գույնով:
30. ***Ցուցում*** քառակուսային ցանցը սկզբում ըստ տողերի, այնուհետև ըստ սյուների մեկընդմեջ ներկել սև և սպիտակ գույներով և յուրաքանչյուր դեպքում դիտարկել հորիզոնական և ուղղաձիգ դիրքերով դասավորված 1x4 չափսերի ուղղանկյունների քանակը:
31. ***Պատ.*** 6:

    Ցուցում օգտվել եզրայինի կանոնից և դիտարկել ամենափոքր թմբուկն ընտրած որդուն:
32. ***Ցուցում*** օգտվել եզրայինի կանոնից և դիտարկել ամենաաջ կամ ամենաձախ կետը:
33. ***Ցուցում*** օգտվել եզրայինի կանոնից և դիտարկել ամենաաջ և ամենաստորին կետը:
34. ***Ցուցում*** օգտվել եզրայինի կանոնից և դիտարկել ամենամեծ բնական թիվը:
35. ***Ցուցում*** օգտվել եզրայինի կանոնից և դիտարկել ամենաշատ սունկ հավաքողին, նկատել, որ նա

հավաքել է առնվազն 9 սունկ:

36. ***Ցուցում՝*** օգտվել եզրայինի կանոնից և դիտարկել ամենավերին ու ամենաձախ նավակը:

37. ***Ցուցում՝*** օգտվել եզրայինի կանոնից և դիտարկել ամենամոտ գտնվող աստղերի զույգը:

38. ***Ցուցում՝*** օգտվել եզրայինի կանոնից և դիտարկել թվերից ամենամեծը (կամ ամենափոքրը):

39. ***Ցուցում՝*** օգտվել եզրայինի կանոնից և դիտարկել երկու ամենաստորին կետերը:

40. ***Ցուցում՝*** օգտվել եզրայինի կանոնից և դիտարկել ամենաքիչ քանակությամբ նավակներ պարունակող տողը կամ սյունը: Եթե այդ տողը կամ սյունը պարունակում է k հատ նավակներ, դիտարկել այդ տողի կամ սյան վրա գտնվող դատարկ n-k հատ վանդակները և վերջիններս ընդգրկող սյուները կամ տողերը:

41. ***Պատ.՝*** $x=1+5t;\ y=39-37t,\ t\in Z$:

42. ***Պատ.՝*** $x=-4+15t;\ y=-5+19t,\ t\in Z$:

43. ***Պատ.՝*** $x=33+17t;\ y=44+23t,\ t\in Z$:

44. ***Պատ.՝*** $x=88+47t;\ y=99+53t,\ t\in Z$:

45. ***Պատ.՝*** $x=-1+3s+4t;\ y=1-s-3t;\ z=1-s,\ \ s;t\in Z$:

46. ***Պատ.՝*** $x=-1-5s+5t;\ y=1+3s;\ z=1+2t,\ \ s;t\in Z$:

47. ***Պատ.՝*** (-4; 9), (20; -33), (4; -9); (-20; 33):

48. ***Պատ.՝*** $x;y\in\varnothing$:

Ցուցում.

I եղանակ՝ օտվել արտադրիչների վերլուծման եղանակից:

II եղանակ՝ դիտարկել հավասարման աջ և ձախ մասերը 4-ի վրա բաժանելիս ստացվող հնարավոր մնացորդները՝ (mod4):

49. ***Պատ․՝*** (5; 2), (2;5), (0; -3), (-3; 0), (3; 3), (-1; -1):

Ցուցում.

I եղանակ՝ օտվել արտադրիչների վերլուծման եղանակից:

II եղանակ՝ օտվել փոփոխականի արտաքսման եղանակից:

50. ***Պատ․՝*** (5; 6), (-5; -6), (13; 6), (-13; -6):

Ցուցում՝ նկատել, որ ելակետային հավասարումը կարելի է բերել $(x-y)(x-2y)=7$ տեսքի:

51. ***Պատ․՝*** (3; 4), (4; 3), (0; 7), (7; 0):

Ցուցում՝ նկատել, որ ելակետային հավասարումը կարելի է բերել $(xy-6)^2+13=(x+y)^2$ տեսքի:

52. ***Պատ․՝*** (1; 2), (2; 1), (-5; 2), (2; -5):

Ցուցում՝ նկատել, որ $x=u+1$ և $y=v+1$ նշանակումներից հետո ելակետային հավասարումը կարելի է բերել $(u+v+4)(uv+1)=5$ տեսքի:

53. ***Պատ․՝*** (0; 1), (0; -1):

Ցուցում՝ նկատել, որ ելակետային հավասարումը կարելի է բերել $(x^3+1)^2+(x^3+1)=y^4+1 \Leftrightarrow (2x^3+3)^2-4y^4=5$ տեսքի:

54. ***Պատ․՝*** (0; -1), (3; -2), (3; -1), (6; -2):

Ցուցում՝ նկատել, որ ելակետային հավասարումը կարելի է բերել $(x+2y)(x+4y+3)=2$ տեսքի:

55. ***Պատ․*** (3; 2), (3; -2), (-3; 2), (-3; -2):

Ցուցում՝ օգտվել գնահատման եղանակից:

56. ***Պատ․*** $x;y \in \varnothing$:

Ցուցում՝ դիտարկել հավասարման աջ և ձախ մասերը 7-ի վրա բաժանելիս ստացվող հնարավոր մնացորդները՝ (mod7):

57. ***Պատ․*** $x;y \in \varnothing$:

Ցուցում՝ դիտարկել հավասարման աջ և ձախ մասերը 3-ի վրա բաժանելիս ստացվող հնարավոր մնացորդները՝ (mod3):

58. ***Պատ․*** (2; 0), (0; 2), (2; 1), (1; 2), (-1; 0), (0; -1), (-1; 1), (1; -1):

Ցուցում՝ օգտվել գնահատման եղանակից:

59. ***Պատ․*** $x;y \in \varnothing$:

Ցուցում՝ դիտարկել հավասարման աջ և ձախ մասերը 7-ի վրա բաժանելիս ստացվող հնարավոր մնացորդները՝ (mod7):

60. ***Պատ․*** $x;y \in \varnothing$:

Ցուցում՝ դիտարկել հավասարման աջ և ձախ մասերը 5-ի վրա բաժանելիս ստացվող հնարավոր մնացորդները՝ (mod5):

61. ***Պատ․*** $x;y \in \varnothing$:

Ցուցում՝ օգտվել գնահատման եղանակից:

62. ***Պատ․*** (1; 3), (1; -3), (8; 3), (8; -3), (0; 1), (0; -1), (9; 1), (9; -1):

Ցուցում՝ օգտվել գնահատման եղանակից:

63. ***Պատ․*** $x;y \in \varnothing$:

Ցուցում՝ դիտարկել հավասարման աջ և ձախ մասերը 4-ի վրա բաժանելիս ստացվող հնարավոր մնացորդները՝ (mod4):

64. ***Պատ․՝*** $x;y;z;t \in \varnothing$:

Ցուցում՝ դիտարկել հավասարման աջ և ձախ մասերը 8-ի վրա բաժանելիս ստացվող հնարավոր մնացորդները՝ (mod8):

65. ***Պատ․՝*** $x;y \in \varnothing$:

Ցուցում՝ դիտարկել հավասարման աջ և ձախ մասերը 4-ի վրա բաժանելիս ստացվող հնարավոր մնացորդները՝ (mod4):

66. ***Պատ․՝*** (0; 50), (50; 0), (2; 32), (32; 2), (8; 18), (18; 8):

Ցուցում՝ նկատել, որ ելակետային հավասարումը կարելի է բերել $y = 50 + x - 10\sqrt{2x}$ տեսքի, որում x-ը փնտրել $x = 2m^2$ $\left(m \in N_0\right)$ տեսքով և օգտվել գնահատման եղանակից :

67. ***Պատ․՝*** (1; 1), (1; -1), (3; 3), (3; -3), (8; 18):

Ցուցում՝ նկատել, որ $x \geq 5$ դեպքում հավասարման ձախ մասը վերջանում է 3-ով և օգտվել գնահատման եղանակից :

68. ***Պատ․՝*** (1; 1; 1), (1; -1; -1), (-1; 1; -1), (-1; -1; 1):

Ցուցում՝ օգտվել Կոշու անհավասարությունից :

69. ***Պատ․՝*** (0; 0), (1; 0), (0; 1), (2; 1), (1; 2), (2; 2):

Ցուցում՝ օգտվել գնահատման եղանակից:

70. ***Պատ․՝*** (0; 0; 0):

Ցուցում՝ օգտվել անվերջ «վայրէջքի» եղանակից:

71. ***Պատ՝.*** (0; 0; 0)։

Ցուցում՝ օգտվել անվերջ «վայրէջքի» եղանակից։

72. ***Պատ՝.*** (0; 0; 0; 0)։

Ցուցում՝ օգտվել անվերջ «վայրէջքի» եղանակից։

73. ***Պատ՝.*** (0; 0; 0)։

Ցուցում՝ օգտվել անվերջ «վայրէջքի» եղանակից։

74. ***Պատ՝.*** լուծում չունի։

Ցուցում՝ դիտարկել հավասարման աջ և ձախ մասերը 16-ի վրա բաժանելիս ստացվող հնարավոր մնացորդները՝ (mod16)։

75. ***Պատ՝.*** $x;y \in \varnothing$։

Ցուցում՝ նկատել, որ ելակետային հավասարումը կարելի է բերել $(x+y)^3=7(x^2y+xy^2)+4$ տեսքի և դիտարկել ստացված հավասարման աջ և ձախ մասերը 7-ի վրա բաժանելիս ստացվող հնարավոր մնացորդները՝ (mod7)։

76. ***Պատ՝.*** $x;y \in \varnothing$։

77. ***Պատ՝.*** (0; 1), (1; 0), (1; 2), (2; 1), (2; 2), (k; -k) $k \in Z$։

78. ***Պատ՝.*** (2; 12; 60), (2; 14; 35), (2; 15; 30), (2; 20; 20), (3; 4; 60), (3; 5; 15), (3; 6; 10), (4; 4; 10), (5; 5; 5)։

Ցուցում՝ նկատել, որ փոփոխականներից ամենափոքրը չի կարող 5-ից մեծ լինել։

79. ***Պատ՝.*** (7; 6; 2), (9; 5; 2), (15; 4; 2), (8; 3; 3), (5; 4; 3)։

Ցուցում՝ նկատել, որ $x \geq y \geq z$ դեպքում կունենանք.

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{z}\right)^3 \Rightarrow z \leq 3 ։$$

80. ***Պատ՝.*** (1; 4; 12), (1; 6; 6), (2; 2; 3)։

Ցուցում՝ նկատել, որ ելակետային հավասարումը կարելի է բերել $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{3}$ տեսքի, որտեղից $x \ge y \ge z$ դեպքում կունենանք. $\frac{3}{x} \ge \frac{4}{3} \Rightarrow x \le \frac{9}{4} < 3$:

81. Պատ․ x;y$\in\varnothing$:

Ցուցում՝ նշանակել $x = z - 1001$ և նկատել, որ ելակետային հավասարումը կարելի է բերել $2001z^2 + 1000 \cdot 1001 \cdot 667 = y^2$ տեսքի և դիտարկել ստացված հավասարման աջ և ձախ մասերը 3-ի վրա բաժանելիս ստացվող հնարավոր մնացորդները՝ (mod3):

82. Պատ․ $(k;\ k;\ 2k+1)$, որտեղ $k \in N$:

Ցուցում՝ նկատել, որ $(x+y)^2 < (x+y)^2 + +3x + y + 1 < < (x+y+2)^2$:

83. Պատ․ $(0;\ 0)$:

Ցուցում՝ նկատել, որ դրական x -երի դեպքում $(2x)^3 < (x+1)^4 - (x-1)^4 < (2x+1)^3$, մյուս կողմից, եթե $(x_0; y_0)$ -ն այդ հավասարման լուծում է, ապա $(-x_0; -y_0)$ -ն ևս լուծում է:

84. Պատ․ $(k;\ k;\ k)$, որտեղ $k \in N$:

Ցուցում՝ օգտվել Կոշու անհավասարությունից և նկատել, որ ելակետային հավասարումը կարելի է բերել $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$ տեսքի:

85. **Պատ․՝** $x=w$; $y=u-w-1$ և $z=w-v$, որտեղ $u;v;w\in Z$, v -ն $w(w+1)$ արտադրյալի որևէ բաժանարար է և $u=\dfrac{w(w+1)}{v}$ ։

Ցուցում՝ նկատել, որ ելակետային հավասարումը կարելի է բերել $1+\dfrac{1}{z}=1+\dfrac{x+y+1}{xy}$ տեսքի, որտեղից, նշանակելով $x+y+1=u$, կստանանք՝ $\dfrac{x(u-x-1)}{u}=$ $=x-\dfrac{x(x+1)}{u}=x-v\in Z$ ։

86. **Պատ․՝** $x=mp^2$; $y=mpq$ և $z=m\left(p^2+pq-q^2\right)$, որտեղ $m;p;q\in Z$ ։

Ցուցում՝ նկատել, որ ելակետային հավասարումը կարելի է բերել $y^2=x(x+y-z)$ տեսքի և վերջինիս լուծումը կարելի է փնտրել հետևյալ տեսքով՝ $x=mp^2$ և $x+y-z=mq^2$ ։

87. **Պատ․՝** օրինակ՝ $x_n=n^{10}(n+1)^8$; $y_n=n^7(n+1)^5$ և $z_n=n^4(n+1)^3$, որտեղ $n\in N$ ։

88. **Պատ․՝** օրինակ՝ $x_n=10+60n^3$; $y_n=10-60n^3$; $z_n=2$ և $t_n=-60n^2$, որտեղ $n\in N$ ։

89. **Պատ․՝** օրինակ՝ $x_n=3\cdot 2002^n$; $y_n=5\cdot 2002^n$; $z_n=6\cdot 2002^n$ և $t_n=4n+1$, որտեղ $n\in N$ ։

Ցուցում՝ նկատել, որ $2002=3^4+5^4+6^4$ ։

90. __Պատ.__ օրինակ՝ $x=2m^2+1;$ $y_n=m\left(2m^2+1\right)$ և $z=-m\left(2m^2+1\right)$, որտեղ $m\in N$:

__Ցուցում՝__ տրված հավասարման լուծումները փնտրել $(\alpha;\beta;-\beta)$ տեսքով:

91. __Պատ.__ $2^{100}-1$:

__Ցուցում՝__ նկատել, որ $2^k=2^{k+1}-2^k$:

92. __Պատ.__ $\dfrac{3^{100}-1}{2}$:

__Ցուցում՝__ նկատել, որ եթե $S=1+3+3^2+3^3+\cdots+3^{99}$, ապա $3S=S-1+3^{100}$:

93. __Պատ.__ $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$:

__Ցուցում՝__ նկատել, որ $1^3=1;$ $2^3=8=3+5;$ $3^3=27=7+9+11$ և այլն:

94. __Պատ.__ $8\cdot\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2=2\cdot n^2(n+1)^2$:

95. __Պատ.__ $n^2\left(2n^2-1\right)$:

96. __Պատ.__ $\dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$:

97. __Պատ.__ $\dfrac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$:

98. __Պատ.__ $\dfrac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{3\cdot 4}$:

99. __Պատ.__ $\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$:

Ցուցում՝ նկատել, որ $k\cdot(k+1)\cdot(k+2)=k^3+3k^2+2k$ ։

100. ***Պատ․՝*** $\dfrac{100}{401}$ ։

Ցուցում՝ նկատել, որ $\dfrac{1}{k(k+4)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+4}\right)$ ։

101. ***Պատ․՝*** $\dfrac{5049}{20200}$ ։

Ցուցում՝ նկատել, որ $\dfrac{1}{(k-1)\cdot k\cdot(k+1)}=$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(k-1)\cdot k}-\frac{1}{k\cdot(k+1)}\right)$$ ։

102. ***Պատ․՝*** $\dfrac{1}{(k-1)d}\left(\dfrac{1}{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{k-1}}-\dfrac{1}{a_{n+1}\cdot a_{n+2}\cdot\ldots\cdot a_{n+k-1}}\right)$ ։

103. ***Պատ․՝*** $\dfrac{\sqrt{201}-1}{2}$ ։

Ցուցում՝ նկատել, որ $\dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}}=\dfrac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k}}{2}$ ։

104. ***Պատ․՝*** $\dfrac{\sin\left(\alpha+\dfrac{n\beta}{2}\right)\sin\dfrac{(n+1)\beta}{2}}{\sin\dfrac{\beta}{2}}$ ։

Ցուցում՝ տրված գումարը դիտարկել որպես 1 հայտարարով կոտորակ և վերջինիս համարիչն ու հայտարարը բազմապատկել $2\sin\dfrac{\beta}{2}$ -ով։

105. ***Պատ.՝*** $\dfrac{\cos\left(\alpha+\dfrac{n\beta}{2}\right)\sin\dfrac{(n+1)\beta}{2}}{\sin\dfrac{\beta}{2}}$:

Ցուցում՝ օգտվել N104 առաջադրանքում դիտարկված գումարի բանաձևից և բերման բանաձևերից:

106. ***Պատ.՝*** $\underbrace{11\ldots10}_{100}$ կամ $\underbrace{11\ldots1}_{101}$:

Ցուցում՝ դիտարկել $\{x\}<0,5$ և $\{x\}\geq 0,5$ դեպքերը:

107. ***Պատ.՝*** $0,\underbrace{11\ldots1}_{99}$:

108. ***Ցուցում՝*** նկատել, որ $1<\alpha<2$:

109. ***Պատ.՝*** $\left\{\dfrac{1}{4}\right\}<\left\{-\dfrac{1}{4}\right\}$:

110. ***Պատ.՝*** $\left\{\sqrt{13}\right\}>\left\{-\sqrt{13}\right\}$:

111. ***Պատ.՝*** $\left\{\sqrt{19}\right\}<\left\{-\sqrt{19}\right\}$:

112. ***Պատ.՝*** $\left\{2\sin\dfrac{\pi}{5}\right\}<\left\{2\sin\dfrac{2\pi}{5}\right\}$:

Ցուցում՝ նկատել, որ $\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{5}<\dfrac{2\pi}{5}<\dfrac{\pi}{2}$:

113. ***Պատ.՝*** 0:

114. ***Պատ.՝*** n^2+3n:

Ցուցում՝ նկատել, որ կամայական k բնական թվի համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝ $k<\sqrt{k^2+2k}<k+1$:

115. ***Պատ.՝*** n^2+7n+6:

116. ***Ցուցում՝*** դիտարկել n-ի զույգ և կենտ դեպքերը:
117. ***Պատ.՝*** $x \in \varnothing$:
118. ***Ցուցում՝*** օգտվել իրական թվի կոտորակային մասի սահմանումից:
119. ***Ցուցում՝*** նկատել, որ եթե $x \in R$, ապա $x-1<[x]\leq x$:
120. ***Ցուցում՝*** օգտվել իրական թվի կոտորակային մասի սահմանումից:
121. ***Ցուցում՝*** նկատել, որ եթե $x \leq y$, ապա կա՛մ $\exists k \in Z | x<k<y$, կա՛մ $\exists k \in Z | x; y \in [k; k+1]$:
122. ***Ցուցում՝*** օգտվել իրական թվի կոտորակային մասի սահմանումից:
123. ***Ցուցում՝*** օգտվել իրական թվի ամբողջ մասի սահմանումից:
124. ***Ցուցում՝*** օգտվել իրական թվի ամբողջ մասի սահմանումից:
125. ***Ցուցում՝*** օգտվել իրական թվի ամբողջ մասի սահմանումից:
126. ***Ցուցում՝*** օգտվել իրական թվի ամբողջ մասի սահմանումից:
127. ***Ցուցում՝*** օգտվել իրական թվի կոտորակային մասի սահմանումից:
128. ***Ցուցում՝*** օգտվել իրական թվի ամբողջ մասի սահմանումից:
129. ***Ցուցում՝*** օգտվել իրական թվի կոտորակային մասի սահմանումից:
130. ***Ցուցում՝*** ապացուցել, որ ցանկացած n բնական թվի

դեպքում $f(n)=\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n+2}{6}\right]+\left[\frac{n+4}{6}\right]-\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n+3}{6}\right]$ ֆունկցիան 6-պարբերական է:

131. ***Ցուցում՝*** ապացուցել, որ ցանկացած *n* բնական թվի դեպքում $f(n)=\left[\frac{3n+8}{25}\right]-\left[\frac{n+2}{25}\right]-\left[\frac{n+11}{25}\right]-\left[\frac{n+19}{25}\right]$ ֆունկցիան 25-պարբերական է:

132. ***Ցուցում՝*** նկատել, որ ցանկացած *n* բնական թվի դեպքում $2n<\sqrt{4n^2+n}<2n+\frac{1}{4}$:

133. ***Պատ.՝*** $x\in[0;1)$:

134. ***Պատ.՝*** $x\in Z$:

135. ***Պատ.՝*** 0 :

136. ***Պատ.՝*** $2,25$:

137. ***Պատ.՝*** $-1,7$:

138. ***Պատ.՝*** $x\in\varnothing$:

139. ***Պատ.՝*** $-\frac{2}{3}$:

140. ***Պատ.՝*** $x=\frac{n}{31}$, որտեղ $n=\overline{0;30}$:

141. ***Պատ.՝*** $x\in\left[-\frac{1}{2};0\right)$:

Ցուցում՝ օգտվել N129 առաջադրանքում նշված հատկությունից:

142. ***Պատ.՝*** $x\in\left[n;n+\frac{1}{2}\right)$, որտեղ $n\in Z$:

Ցուցում՝ նկատել, որ $f(x)=[2x]-2[x]$ ֆունկցիան

1-պարբերական է և, ուրեմն, տրված հավասարումը բավական է լուծել $[0;1)$ միջակայքում և ի նկատի ունենալ $f(x)$ ֆունկցիայի պարբերական լինելը:

143. ***Պատ․՝*** $x \in \{k+6n | k=0;2;3;4;5 \;\; n \in Z\}$, որտեղ $n \in Z$:

Ցուցում՝ նկատել, որ տրված հավասարումը կարող է ունենալ միայն ամբողջ լուծումներ, ընդ որում եթե x_0-ն այդ հավասարման լուծում է, ապա x_0+6n-ը, որտեղ $n \in Z$, ևս կլինի այդ հավասարման լուծում:

144. ***Պատ․՝*** 0:

Ցուցում՝ նկատել, որ $2x = x+[x]+\{x\}$:

145. ***Պատ․՝*** $-\frac{4}{3};\; -\frac{2}{3};\; 0$:

Ցուցում՝ նկատել, որ $3x$-ը զույգ ամբողջ թիվ է:

146. ***Պատ․՝*** 0:

Ցուցում՝ հավասարման երկու մասը բազմապատկել 2-ով:

147. ***Պատ․՝*** $x \in (-2;-1] \cup [2;3)$:

148. ***Պատ․՝*** $x \in \{\log_2(1+2n) | n \in N_0\}$:

149. ***Պատ․՝*** $x \in \{n+\log_2 3 | n \in N_0\}$:

150. ***Պատ․՝*** $x \in \left(-\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$:

151. ***Պատ․՝*** $x \in (-\infty;\; 0,65) \cup [1;\; 1,15)$:

Ցուցում՝ դիտարկել հետևյալ դեպքերը. $[x]<0$; $0 \le [x] < 2$ և $[x] \ge 2$:

152. ***Պատ․՝*** 0:

Ցուցում՝ տրված անհավասարության երկու մասը բազմապատկել 4-ով և $2x$-ը փոխարինել $[2x]+\{2x\}$ գումարով:

153. ***Պատ․՝*** $x\in\left(-\arcsin\frac{1}{4};0\right)\cup\left(\arcsin\frac{3}{4};\frac{\pi}{2}\right)$:

154. ***Պատ․՝*** $x\in\left[-1;\frac{9}{4}\right)\cup\left[n;n+\frac{1}{n^2}\right)$, որտեղ $n\in Z/\{-1;0;1;2\}$:

Ցուցում՝ կատարել փոփոխականի փոխարինում՝ $x=n+\alpha$, որտեղ $n\in Z$, $\alpha\in R$ և $0\le\alpha<1$:

155. ***Պատ․՝*** $x\in\{0\}\cup\left[n;\ n+1-\frac{1}{1-n}\right)$, որտեղ $n\in Z$ և $n<0$:

Ցուցում՝ նկատել, որ ա/ $x=0$-ն բավարարում է տրված անհավասարմանը, բ/ $x>0\Rightarrow\varnothing$, գ/ $x<0$ $\Rightarrow$ $n\le x<n+1$, որտեղ $n\in Z$ և $n<0$:

156. ***Ցուցում՝*** նկատել, որ $a+b-1-ab=(a-1)(1-b)$:

157. ***Ցուցում՝*** նկատել, որ $a^2+b^2-c^2-(a+b-c)^2=$ $=2(a-c)(c-b)$:

158. ***Ցուցում՝*** նկատել, որ $\frac{1}{2}\cdot(a+b)+\frac{1}{4}-\sqrt{\frac{a+b}{2}}=$ $=\left(\sqrt{\frac{a+b}{2}}-1\right)^2$:

159. ***Ցուցում՝*** նկատել, որ $a(x+y-a)-xy=(a-x)(y-a)$:

160. ***Ցուցում՝*** նկատել, որ $\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)-\left(\frac{2}{a+b}-1\right)^2=$

$$=\frac{(a-b)^2(1-a-b)}{ab(a+b)^2}:$$

161. ***Ցուցում՝*** նկատել, որ $\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}-\sqrt{a}-\sqrt{b}=$

$$=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}\sqrt{b}}\left(a+b-2\sqrt{ab}\right):$$

162. ***Ցուցում՝*** նկատել, որ $x^2+y^2+z^2-1=x^2+y^2+z^2-$

$$-xy-yz-zx=\frac{1}{2}\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right):$$

163. ***Ցուցում՝*** նկատել, որ $2x^4+1-2x^3-x^2=$

$$=(x-1)\left(2x^3-x-1\right)=(x-1)^2\left(x^2+(x+1)^2\right):$$

164. ***Ցուցում՝*** նկատել, որ $2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)-a-b-c-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-$

$$-\frac{1}{c}=\left(\frac{a}{b}-a\right)+\left(\frac{b}{c}-b\right)+\left(\frac{c}{a}-c\right)+\left(\frac{a}{b}-\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{b}{c}-\frac{1}{c}\right)+$$

$$+\left(\frac{c}{a}-\frac{1}{a}\right)=\frac{a}{b}(1-b)+\frac{b}{c}(1-c)+\frac{c}{a}(1-a)-\frac{1}{b}(1-a)-$$

$$-\frac{1}{c}(1-b)-\frac{1}{a}(1-c)=\frac{a}{b}(1-b)+\frac{b}{c}(1-c)+\frac{c}{a}(1-a)-$$

$$-\frac{abc}{b}(1-a)-\frac{abc}{c}(1-b)-\frac{abc}{a}(1-c):$$

165. ***Ցուցում՝*** նկատել, որ $2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)-a^4-b^4-$

$$-c^4=4a^2b^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)^2:$$

166. ***<u>Ցուցում՝</u>*** նկատել, որ $\sqrt{\frac{a}{b+c}}=\sqrt{\frac{a}{b+c}\cdot 1}\geq \frac{2}{\frac{b+c}{a}+1}=$

$=\frac{2a}{a+b+c}$:

167. ***<u>Ցուցում՝</u>*** նկատել, որ $\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}\leq$

$\leq \frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{2}=b$:

168. ***<u>Ցուցում՝</u>*** նկատել, որ $\frac{x^8+y^8}{2}\geq \left(\frac{x^4+y^4}{2}\right)^2$:

169. ***<u>Ցուցում՝</u>*** նկատել, որ $\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2}{2}\geq$

$\geq \left(\frac{a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}}{2}\right)^2=\left(\frac{1+\frac{1}{ab}}{2}\right)^2$:

170. ***<u>Ցուցում՝</u>*** նկատել, որ $a^4+b^4+c^4\geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ և

$\frac{a^2b^2+b^2c^2}{2}\geq b^2|ac|\geq ab^2c$:

171. ***<u>Ցուցում՝</u>*** նկատել, որ $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=$

$=(x-y)^2+\left(\sqrt{2xy}\right)^2$:

172. ***<u>Ցուցում</u>***.

I եղանակ՝ նկատել, որ ցանկացած $\lambda\in R$ դեպքում $2\lambda\sqrt{6a_i+1}\leq \lambda^2+(6a_i+1)$ $\left(i=\overline{1;5}\right)$ և դիտարկել

$\lambda = \sqrt{\frac{11}{5}}$ դեպքը,

II եղանակ՝ նկատել, որ $\sqrt{6a_1+1}+\sqrt{6a_2+1}+\sqrt{6a_3+1}+$ $+\sqrt{6a_3+1}+\sqrt{6a_4+1}+\sqrt{6a_5+1}=1\cdot\sqrt{6a_1+1}+1\cdot\sqrt{6a_2+1}+$ $+1\cdot\sqrt{6a_3+1}+1\cdot\sqrt{6a_4+1}+1\cdot\sqrt{6a_5+1}$ և կիրառել Կոշու-Բունյակովսկու անհավասարությունը:

173. ***Ցուցում՝*** նկատել, որ $5\sqrt{ab}+7\sqrt{ac}+3\sqrt{bc}\le\frac{5(a+b)}{2}+$ $+\frac{7(a+c)}{2}+\frac{3(b+c)}{2}$:

174. ***Ցուցում՝*** դիտարկել $n+1$ հատ հետևյալ թվերը՝ 1 և $\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right);\ \left(1+\frac{1}{n}\right);\ \cdots;\ \left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n}$ և նկատել, որ

$$\frac{\overbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)}^{n}+1}{n+1}\ge\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\ :$$

175. ***Ցուցում՝*** դիտարկել $n+2$ հատ հետևյալ թվերը՝ 1 և $\underbrace{\left(1-\frac{1}{n+1}\right);\ \left(1-\frac{1}{n+1}\right);\ \cdots;\ \left(1-\frac{1}{n+1}\right)}_{n+1}$ և կիրառել Կոշու անհավասարությունը:

176. ***Ցուցում՝*** նկատել, որ կամայական $x\in(0;1)$ դեպքում $x^{\frac{1}{2}}<x^{\frac{1}{3}}$, ըստ այդմ $\sqrt{abc}<\sqrt[3]{abc}\le\frac{a+b+c}{3}$ և

$$\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < \sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)} \le$$

$$\le \frac{(1-a)+(1-b)+(1-c)}{3}:$$

177. ***Ցուցում՝*** նկատել, որ $\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}=\frac{1}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}}+$ $+\frac{1}{\sqrt{c}\cdot\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}$ և օգտվել Կոշու-Բունյակովսկու անհավասարությունից:

178. ***Ցուցում՝*** նկատել, որ $x^4+y^4 \ge \sqrt{x^4+y^4}\cdot\sqrt{2x^2y^2}=$ $=\sqrt{\left(x^2\right)^2+\left(y^2\right)^2}\cdot\sqrt{(xy)^2+(xy)^2}$ և օգտվել Կոշու-Բունյակովսկու անհավասարությունից:

179. ***Ցուցում՝*** նկատել, որ $\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)=$ $=\left(1^2+\left(\frac{1}{\sqrt{\sin\alpha}}\right)^2\right)\left(1^2+\left(\frac{1}{\sqrt{\cos\alpha}}\right)^2\right)$ և օգտվել Կոշու-Բունյակովսկու անհավասարությունից:

180. ***Ցուցում՝*** նկատել, որ $9=3^2=(1+1+1)^2=$ $=\left(x\cdot\frac{1}{x}+y\cdot\frac{1}{y}+z\cdot\frac{1}{z}\right)^2$ և օգտվել Կոշու-Բունյակովսկու անհավասարությունից:

181. ***Ցուցում՝*** նկատել, որ անհավասարությունը ճշմարիտ է $a=0$ և $b=0$ դեպքերում, իսկ երբ $ab\neq 0$, նշանակել $a^2=tg\alpha$; $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ և $b^2=tg\beta$; $\beta\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$:

182. ***Ցուցում՝*** կատարել փոփոխականների

փոխարինում՝ $a = x + \frac{1}{3};\ b = y + \frac{1}{3}$ և $c = z + \frac{1}{3}$:

183. ***Ցուցում՝*** կատարել փոփոխականների փոխարինում՝ $a = 2\cos\alpha$ և $b = 3\cos\beta$, որտեղ $\alpha;\beta \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$:

184. ***Ցուցում՝*** կատարել փոփոխականների փոխարինում՝ $a = \frac{c}{\sin^2\alpha}$ և $b = \frac{c}{\sin^2\beta}$, որտեղ $\alpha;\beta \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$:

185. ***Ցուցում՝*** կատարել փոփոխականների փոխարինում՝ $a = tg\alpha;\ b = tg\beta$ և $c = tg\gamma$, որտեղ $\alpha;\beta;\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$:

186. ***Ցուցում՝*** օգտվել լրիվ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդից:

187. ***Ցուցում՝*** օգտվել լրիվ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդից:

188. ***Ցուցում՝*** օգտվել լրիվ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդից:

189. ***Ցուցում՝*** օգտվել լրիվ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդից:

190. ***Ցուցում՝*** օգտվել լրիվ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդից:

191. ***Ցուցում՝*** նկատել, որ անհավասարությունը համասեռ է թե՛ $a_i\ \left(i = \overline{1;n};\ n \in N\right)$, թե՛

$b_i\ \left(i=\overline{1;n};\ n\in N\right)$ և թե՛ $c_i\ \left(i=\overline{1;n};\ n\in N\right)$ փոփոխականների նկատմամբ, հետևաբար, առանց ընդհանրությունը խախտելու կարելի է ենթադրել, որ $a_1^3+a_2^3+\cdots a_n^3=b_1^3+b_2^3+\cdots b_n^3=c_1^3+c_2^3+\cdots c_n^3=1$:

192. ***Ցուցում՝*** նկատել, որ անհավասարությունը համասեռ է թե՛ $a_i\ \left(i=\overline{1;n};\ n\in N\right)$ և թե՛ $b_i\ \left(i=\overline{1;n};\ n\in N\right)$ փոփոխականների նկատմամբ, հետևաբար, առանց ընդհանրությունը խախտելու կարելի է ենթադրել, որ $a_1^2+a_2^2+\cdots a_n^2=$ $=b_1^2+b_2^2+\cdots b_n^2=1$:

193. ***Ցուցում՝*** նկատել, որ անհավասարությունը համասեռ է a և b փոփոխականների նկատմամբ, հետևաբար, առանց ընդհանրությունը խախտելու կարելի է ենթադրել, որ $a^{n+1}+b^{n+1}=1$, որտեղից կհետևի, որ $0<a<1$ և $0<b<1$:

194. ***Ցուցում՝*** նկատել, որ անհավասարությունը համասեռ է $a;\ b;\ c$ և d փոփոխականների նկատմամբ, հետևաբար, առանց ընդհանրությունը խախտելու կարելի է ենթադրել, որ $a+b+c+d=1$ և ի նկատի ունենալ, որ $\forall x\in(0;1)\Rightarrow\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}\geq 2x$:

195. ***Ցուցում՝*** նկատել, որ անհավասարությունը համաչափ է $a;\ b;\ c$ և d փոփոխականների նկատմամբ, հետևաբար, առանց ընդհանրությունը խախտելու կարելի է ենթադրել, որ $a\geq b\geq c\geq d$:

196. ***Ցուցում՝*** նկատել, որ անհավասարությունը համաչափ է $a; b$ և c փոփոխականների նկատմամբ, հետևաբար, առանց ընդհանրությունը խախտելու կարելի է ենթադրել, որ $a \ge b \ge c$:

197. ***Ցուցում՝*** դիտարկել $a_1x^2+b_1x+c_1$, $a_2x^2+b_2x+c_2$ և $7x^2+2x+1$ քառակուսային եռանդամները:

198. ***Ցուցում՝*** $c^2+(a+b-c)^2-a^2-b^2$ արտահայտությունը դիտարկել որպես քառակուսային եռանդամ c փոփոխականի նկատմամբ:

199. ***Ցուցում՝*** $xy-a(x+y-a)$ արտահայտությունը դիտարկել որպես քառակուսային եռանդամ a փոփոխականի նկատմամբ:

200. ***Ցուցում՝*** $3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2$ տարբերությունը դիտարկել որպես քառակուսային եռանդամ a փոփոխականի նկատմամբ:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Ամիրջանյան Յու.Ա., Ժամանակակից դիդակտիկա: Երևան, Լույս հրատ., 1990, 328 էջ:
2. Ամիրջանյան Յու.Ա., Սահակյան Ա.Ս., Մանկավարժություն, ուսումնական ձեռնարկ մանկավարժական բուհերի ուսանողների համար, Մանկավարժ հրատ.: Երևան, 2005թ., 456 էջ:
3. Այվազյան Է.Ի., Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկա: Եր., ԵՊՀ հրատ., 2016, 202 էջ:
4. Առաքելյան Կ.Գ., Առաքելյան Դ.Կ., Մաթեմատիկա: Հետաքրքրաշարժ և տրամաբանական խնդիրներ: Եր.: ՄՀՄ գրատուն, 2011.-132էջ:
5. Բրուտյան Գ.Ա., Տրամաբանություն: Եր.: «Գիտություն» հրատ., 1998, 213 էջ:
6. Դոմորյադ Ա.Պ., Մաթեեմատիկական խաղեր և զվարճալիքներ: Երևան: «Լույս» հրատարակչություն, 1966, 324էջ:
7. Կորդեմսկի Բ.Ա., Մաթեմատիկական հնարամտություն: Երևան: «Հայաստան» հրատարակչություն, 1967, 332էջ:
8. Հակոբյան Ա., Խրիմյան Ն., Տրամաբանական խաղեր: Դասագիրք հանրակրթական դպրոցի համար: Երևան: «Մակմիլան-Արմենիա», 2000, 200էջ:
9. Ղարագեբակյան Գ.Ա., Թվերի տեսության

դասընթաց: Եր.- Էդիթ Պրինտ, 2008.-268 էջ:
10. Տոնոյան Գ.Ա., Տոնոյան Գ.Գ., Դիոֆանտյան հավասարումներ, Եր: Հեղինակային հրատ., 2008.-140 էջ:
11. Агаханов Н.Х. и др., Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2006, М.: МЦНМО, 2007.-472с.
12. Амелькин В.В., Рабцевич В.Л., Задачи с параметрами, Минск, ООО «Асар», 2004.-464с.
13. Асмус В.Ф., Логика. “Госполитиздат”, 1947. - 387стр.
14. Бабинская И.Л., Задачи математических олимпиад.- Издательство «Наука», Москва, 1975.-112с.
15. Балаян Э.Н., 800 лучших олимпиадных задач по математике для подготовки к ЕГЭ, Ростов-на-Дону: Феникс, 2013.-317с.
16. Балаян Э.Н., Лучшие олимпиадные и занимательные задач по математике: 5-6 классы, Ростов-на-Дону: Феникс, 2019.-247с.
17. Болтянский В.Г., Виленкин Н.Я., Симметрия в алгебре. М.: Наука, МЦНМО, 2002.-240с.
18. Бураго А.Г., Дневник математического кружка: первый год занятий. М.: МЦНМО, 2017. – 368с.
19. Бураго А.Г., Дневник математического кружка: второй год занятий. М.: МЦНМО, 2020. – 488с.
20. Васильев Н.Б., Савин А.П., Егоров А.А., Избранные олимпиадные задачи. Математика, М.: Бюро

Квантум, 2007.-160с.

21. Вертгеймер М., Продуктивное мышление, М.: Прогресс, 1987.-336с.
22. Гельфонд А.О., Решение уравнений в целых числах, М.: Изд-во “Наука”, 1978, 68с.
23. Германович П.Ю., Сборник задач по математике на сообразительность: пособие для учителей, Москва, Гос. Учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1960.-225с.
24. Гольдфарб Н.И., Сборник вопросов и задач по физике, М.: Высшая школа,1969. - 288 с.
25. Горбачев Н.В., Сборник олимпиадных задач по математике.-М., МЦНМО, 2004.-560с.
26. Горев П.М., Утемов В.В., Уроки развивающей математики. 5–6 классы, Задачи математического кружка, Киров, Издательство Межрегиональный центр инновационных технологий в образовании, 2014.-207с.
27. Готман Э.Г., Задачи по планиметрии и методы их решения. М.: Просвещение: АО «Учеб. лит.», 1996.-240с.
28. Гусев А.А., Математический кружок: пособие для учителей и учащихся.- М.: Мнемозина, 2015.- 176с.
29. Золотарёва Н. Д., Федотов М. В., Олимпиадная математика. Арифметические задачи с решениями и указаниями. 5-7 классы, М.: Лаб. Знаний, 2020.-252с.

30. Золотарёва Н. Д., Федотов М. В., Олимпиадная математика. Логические задачи с решениями и указаниями. 5-7 классы, М.: Лаб. Знаний, 2021.-241с.
31. Ибатулин И.Ж., Математические олимпиады. М.: Бином, 2013.-358с.
32. КВАНТ, научно-популярный физико-математический журнал, задачник «кванта», ISSN 0130-2221, 2000-2023г.
33. Козлова Е.Г., Сказки и подсказки, М.: МЦНМО, 2004.-165с.
34. Крачовский С.М., Дивергентные задачи по математике и их визуальные образы. Москва: Прометей, 2016.-166с.
35. Крижановский А.Ф., Математические кружки: 5-7 классы, М.: ИЛЕКСА, 2016.-320с.
36. Кречмар В.А., Задачник по алгебре, М.: «Наука», 1964.-388с.
37. Левитин Е.С. Математическое образование и математика в современной цивилизации. Т. 1, URSS.-2011, 32 печ. л.
38. Летчиков А.В., Принцип Дирихле. Задачи с указаниями и решениями, Учебное пособие, Ижевск, Изд-во Удм. Ун-та, 1992.-108с.
39. Лурье М.В., Александров Б.И., Задачи на составление уравнений, М.: Наука. 1990.-96с.
40. Медников Л.Э., Шаповалов А.В., Турнир городов:

мир математики в задачах. М.: МЦНМО, 2017.-472с.

41. Михелькевич В.Н., Радомский В.М., Основы научно-технического творчества, изд. Ростов-на-Дону.: Феникс, 2004.-320с.
42. Мочалов Л.П., Головоломки и занимательные задачи.- М: ФИЗМАТЛИТ. 2006.-192с.
43. Пойа Д., Математическое открытие, Москва, Издательство «Наука», 1976.-448с.
44. Пчелинцев Ф.А., Чулков П.В., Математика. Задачи на развитие математического мышления с решениями и ответами. 5-6 классы, М.: «Издат-школа», 2000.-112с.
45. Розенталь А., Правило крайнего. Научно-популярный физико-математический журнал "Квант". 1976, N8, стр. 57-61.
46. Савин А.П., Энциклопедический словарь юного математика.-М.: Педагогика, 1989.-352с.
47. Седракян Н.М., Авоян А.М., Неравенства. Методы доказательства, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.-256с.
48. Семенов И.Л., Антье и мантисса, М.: ИПМ имени Кельдыша, 2015.-375с.
49. Серпинский В., О решении уравнений в целых числах, М.: Гос. Изд-во физико-математической литературы, 1961.-88с.
50. Федоров Р.М., Канель-Белов А.Я., Колвальджи А.К., Ященко И.В., Московские математические олимпиады 1993-2005г., М.: МЦНМО, 2006.-456с.

51. Шарыгин И.Ф., Гордин Р.К., Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответамы. М.: ООО «Астрель», 2001.-400с.
52. Шарыгин И.Ф., Шевкин А.В., Задачи на смекалку. М.: Просвещение, 2010.-95с.
53. Шахно К.У., Сборник задач по элементарной математике повышенной трудности, Минск. Изд-во «Высшая школа», 1965.-523с.
54. Шень А., Задачи по математике, М.: МЦНМО, 2000.-272с.
55. Якир М.С., Что такое красивая задача?, Математика в школе.- 1989.-№6, стр. 41-46.
56. Hardy G. H. A Mathematician's Apology. — Cambridge: University Press, 1940. - P. 153.
57. Andreescu T., Andrica D., Cucurezeanu I., An introduction to Diophantine equations A problem-based approach. Birkhauser, 2010.-P. 345

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԻԿՈՂՈՍՅԱՆ ԳԱԳԻԿ ՍԵՐՅՈԺԱՅԻ
ֆիզմաթ գիտ. թեկնածու
ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ ՎԱՐԴԱՆ ՖՐԱՆՑԻ
ֆիզմաթ գիտ. թեկնածու, դոցենտ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՁԵՌՆԱՐԿ ԽՆԴՐԱԳԻՐՔ

ՈՒՍՈՒՄՆԱՕԺԱՆԴԱԿ ՁԵՌՆԱՐԿ ՍՈՎՈՐՈՂՆԵՐԻ ԵՎ ՍՈՎՈՐԵՑՆՈՂՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

НИКОГОСЯН ГАГИК СЕРЕЖАЕВИЧ
кандидат физ.-мат. наук
МАНУКЯН ВАРДАН ФРАНЦЕВИЧ
кандидат физ.-мат. наук, доцент

ПОСОБИЕ ЗАДАЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ И УЧИТЕЛЕЙ

(*на армянском языке*)

Ստորագրված է տպագրության՝ 27.09.2024թ.
Թուղթը՝ օֆսեթ
Չափսը՝ 60X84 1/16
Ծավալը՝ 11,625 մամուլ
Տպաքանակը՝ 100
Տպագրվել է «Ռուբեն Ավետիսյան» Ա/Ձ-ում
Գյումրի 2024

ISBN 978-9939-0-5045-4

9 789939 050454