

Գ.Ս. ՆԻԿՈՂՈՍՅԱՆ, Ե.Ս. ՄԵՐՈՒԲՅԱՆ, Գ.Հ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԵՎ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ՁԵՌՆԱՐԿ



ԳՅՈՒՄՐԻ
2020

Գ. Ս. ՆԻԿՈՂՈՍՅԱՆ, Ե. Ս. ՍԵՐՈԲՅԱՆ, Գ. Հ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԵՎ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ՁԵՌՆԱՐԿ

ՍՈՎՈՐՈՂՆԵՐԻ ԵՎ ՍՈՎՈՐԵՑՆՈՂՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

ՈՒՍՈՒՄՆԱՄԵԹՈՂԱԿԱՆ ՁԵՌՆԱՐԿ

ԳՅՈՒՄՐԻ

Հեղինակային հրատարակություն

2020

ՀՏԴ 51:53(07)
ԳՄԴ 22.1+22.3g7
Ն 702

**Հրատարակության և երաշխավորված Շիրակի
Մ. Նալբանդյանի անվան պետական համալսարանի
գիտական խորհրդի 27.08.2020թ. նիստի N21/2 որոշմամբ**
Գիտական խմբագիր՝
Ֆիզմաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ
Վարդան Մանուկյան
Գրախոսներ՝
Ֆիզմաթ. գիտ. դոկտոր, դոցենտ
Մաշա Հարությունյան
մանկ. գիտ. դոկտոր, ՌԲԱ պրոֆեսոր
Արմեն Ծատուրյան

Նիկողոսյան Գ. Մ., Սերոբյան Ե. Ս., Մկրտչյան Գ. Հ.
Ն 702 Մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի ձեռնարկ սովորողների և
սովորեցնողների համար: Ուսումնամեթոդական ձեռնարկ.-
Գյումրի: Հեղ. հրատ., 2020.- 160 էջ:

Ձեռնարկը նվիրված է մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացներում Դիրիխլեի մաթեմատիկական և ֆիզիկական սկզբունքների, ինվարիանտի, համաչափության վերականգնման սկզբունքի, փուլային եղանակի, հաշվարկման հարմար համակարգի ընտրության մեթոդի, միջատարկայական կապերի և խնդիրների լուծման էվրիստիկ մոտեցումների արդյունավետ և օգտակար կիրառությունների վեր հանմանը:

Ձեռնարկը հասցեագրված է ավագ դպրոցում մաթեմատիկա և ֆիզիկա դասավանդողներին, բուհերի ֆիզիկամաթեմատիկական ֆակուլտետների ուսանողներին, ավագ դպրոցի աշակերտներին: Այն կարող է օգտակար լինել դպրոցականների մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի օլիմպիադաների նախապատրաստվողներին, ինչպես նաև կարող է կիրառվել մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի արտադասարանական դասընթացներում և խմբակներում:

ՀՏԴ 51:53(07)
ԳՄԴ 22.1+22.3g7

ISBN 978-9939-0-3386-0

© Նիկողոսյան Գ.Մ., Սերոբյան Ե.Ս., Մկրտչյան Գ.Հ., 2020թ.

ԽՄԲԱԳՐԻ ԿՈՂՄԻՑ

Ներկայացված ձեռնարկը նվիրված է դպրոցական մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի որոշ սկզբունքների, մեթոդների և մոտեցումների մատչելի ներկայացմանն ու արդյունավետ կիրառություններին: Չնայած դրանց կարևորությունը՝ դասագրքերում և հայալեզու առկա ուսումնամեթոդական գրականության մեջ այդ հարցերը քիչ են լուսաբանված: Հեղինակային խումբը, փորձելով լրացնել այս բացը, հրատարակել է մի շարք գիտամեթոդական հոդվածներ, որոնց համատեղման և համակարգման արդյունքում էլ ստեղծվել է սույն ձեռնարկը:

Ինչպես մաթեմատիկան և ֆիզիկան, այնպես էլ դրանց փոխներգործուն կապերը հարատև զարգացող են և յուրաքանչյուր նոր սերնդի համար կարիք է լինում դրանք նորովի մեկնաբանել և մասսայականացնել: Դա անհրաժեշտ է սովորողների մոտ ինչպես աշխարհայացքի, այնպես էլ գեղեցիկի ու ներդաշնակի ընկալումների ձևավորման և զարգացման համար: Այս առումով ուշազրավ է ձեռնարկի շարադրանքի ոճը, որով հեղինակները փորձել են ֆիզիկայի և մաթեմատիկայի որոշ հարցեր դիտարկել ու քննարկել մեկտեղված և կոմբինացված: Ուսումնամեթոդական սույն աշխատանքի մյուս կարևոր արժանիքը նրանում է, որ տարբեր օրինակներով աշակերտին ծանոթացնում է բազմաթիվ օգտակար առարկայական հնարքների հետ, ինչը հաստատապես կարող է օգտակար լինել առարկայական օլիմպիադաներին նախապատրաստվողների համար:

Ձեռնարկի առանձնահատուկ և յուրօրինակ ձեռքբերումներից է կոնֆլիկտաբանության մեջ հայտնի կոնֆլիկտների կարգավորման փուլային եղանակի հաջողված տեղայնացումը և արդյունավետ կիրառումը ֆիզիկայի և մաթեմատիկայի տարբեր ոչ տիպային խնդիրներ լուծելիս:

Ձեռնարկը կարող է օգտակար լինել մանկավարժների, մանկավարժական բուհերի ուսանողների, մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի օլիմպիադաների նախապատրաստվող և առհասարակ այդ առարկաներով հետաքրքրվող աշակերտների համար:

Վ. Մանուկյան

ՆԱԽԱԲԱՆ

ՀՀ-ում անցում կատարելով տասներկուամյա կրթական համակարգի, դպրոցական դասընթացում տարբեր առարկաների ծրագրերում կատարվեցին փոփոխություններ, այն է՝ ավելացան նոր բաժիններ կամ էլ եղած բաժիններում մատուցվող նյութը դարձավ առավել ընդգրկուն: Այս ամենով հանդերձ, կան մաթեմատիկական և ֆիզիկական բազում սկզբունքներ, մեթոդներ և եղանակներ, ինչպիսիք են օրինակ Դիրիխլեի մաթեմատիկական և ֆիզիկական սկզբունքները, ինվարիանտի կիրառման մեթոդը, հաշվարկման համակարգի փոփոխման եղանակն և այլն, որոնց մասին դպրոցական դասագրքերում կամ գրեթե չի խոսվում, կամ էլ, եթե անգամ խոսվում է (ինչպես օրինակ Դիրիխլեի մաթեմատիկական սկզբունքի մասին), ապա շարադրված նյութի առկա սուղ ծավալը հնարավորություն չի ընձեռում աշակերտներին հավուր պատշաճի ընկալելու տվյալ սկզբունքի կամ եղանակի էությունն ու կիրառելիության սահմանները, մինչդեռ հայտնի է, թե որքան լայն կիրառություն ունեն այս մեթոդները մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացում, մասնավորաբար դպրոցականների օլիմպիադաների տարբեր փուլերում հանդիպող շատ խնդիրների լուծման հիմքում ընկած է հենց նման մեթոդների ու սկզբունքների կիրառությունը:

Համոզված ենք, որ ժամանակակից աշակերտը, բացի ակադեմիական գիտելիքներ սերտելուց, կարիք ունի նաև առարկայական տարբեր հնարքներով, սկզբունքներով և մեթոդներով «զինվելու», ինչը, ինչպես վերը նշեցինք, լիարժեք արտացոլված չէ մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի դպրոցական դասագրքերում, որոնք մի կողմից շատ հաջողված են ուսումնական նյութի մատուցման առումով, սակայն, ցավոք

արտի, չեն լրացնում այն ահռելի «խզվածքը», որ առկա է մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացի ուսումնական և օլիմպիական ծրագրերի միջև:

Այս համատեքստում սույն ուսումնամեթոդական ձեռնարկը միտված է խթան հանդիսանալու այդ «խզվածքի» լրացման համար: Ներկայացվող ձեռնարկում փորձել ենք համապարփակ ձևով ներկայացնել Դիրիխլեի մաթեմատիկական և ֆիզիկական սկզբունքների, ինվարիանտի կիրառման մեթոդի, համաչափության վերականգնման սկզբունքի և հաշվարկման համակարգի փոփոխման եղանակի էությունների մասին, ինչպես նաև մեթոդական ցուցումների տեսքով վեր հանել մաթեմատիկական և ֆիզիկական խնդիրների այն դասերը, որոնցում թվարկված մեթոդները, սկզբունքները, եղանակները, միջառարկայական կապերն և էվրիստիկ մոտեցումները կարող են ունենալ իրենց ուսանելի, օգտակար և արդյունավետ կիրառությունները: Ձեռնարկում անդրադարձել ենք նաև կոնֆլիկտների կարգավորման մեջ կիրառվող հայտնի փուլային եղանակին, վեր հանելով վերջինիս հնարավոր արդյունավետ կիրառությունները մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի տարբեր ոչ տիպային խնդիրներում:

Հետազոտությունն իրականացվել է ՀՀ ԿԳՆ գիտության պետական կոմիտեի տրամադրած ֆինանսավորմամբ՝ 18T-5C287 ծածկագրով գիտական թեմայի շրջանակներում:

Ձեռնարկի կազմման համար հիմք են հանդիսացել հեղինակների հրատարակած ներքոհիշյալ գիտամեթոդական հոդվածները.

1. Գ. Նիկողոսյան, Դիրիխլեի սկզբունքի կիրառումը որպես ուսուցման արդյունավետության բարձրացման միջոց, ՎՊՀ գիտական տեղեկագիր, 2018, պրակ Բ, էջ 216-225:

2. Գ.Ս. Նիկողոսյան, Լ.Ա. Խալիֆյան, Ինվարիանտի կիրառումը մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի տարբեր ոչ տիպային խնդիրներում, ՇՊՀ գիտական տեղեկագիր, 2018, պրակ Բ, էջ 162-170:
3. Գ. Նիկողոսյան, Գ. Մկրտչյան, Մաթեմատիկայում համաչափության վերականգնման սկզբունքի որոշ կիրառությունների մասին, ԵՎՐՈՊԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ, գիտական հոդվածների ժողովածու 2018, N9, էջ 300-312:
4. Գ.Հ. Մկրտչյան, Ե.Ս. Սերոբյան, Համաչափության վերականգնման եղանակի կիրառումը ֆիզիկայի խնդիրներում, ՇՊՀ գիտական տեղեկագիր, 2018, պրակ Բ, էջ 148-154:
5. Գ. Նիկողոսյան, Գ. Մկրտչյան, Ե. Սերոբյան, Փուլային եղանակը որպես կոնֆլիկտների կարգավորման և բնագիտական խնդիրների լուծման արդյունավետ միջոց, Միջազգայի գիտաժողովի նյութերի ժողովածու, ՀՀ ԿԳՆ, ՎՊՀ 2019, էջ 529-536:
6. Գ.Ս. Նիկողոսյան, Միջառարկայական կապերը հանրահաշվի և երկրաչափության դպրոցական դասընթացում, ԵՎՐՈՊԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ, գիտական հոդվածների ժողովածու, 2019, N10 (02), էջ. 244-257:
7. Սերոբյան Եր., Նիկողոսյան Գ., Մկրտչյան Գ., Խալիֆյան Լ., Միջառարկայական կապերը ֆիզիկայի և մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում, «Մխիթար Գոշ», 2019, 2, էջ. 12-20:
8. Никогосян Г.С., Мкртчян Г.О., Серобян Ер.С., Применение информационных технологий на уроках математики и физики как средство повышения качества образования, Физика в школе и вузе: Международный сборник научных статей. – Выпуск 21. – СПб.: РГПУ им. А.И. Герцена, 2019. –

202 թ. , թ. - 83-92.

9. Գ. Նիկողոսյան, Հաշվարկման հարմար համակարգի ընտրության կարևորությունը ֆիզիկայի և մաթեմատիկայի խնդիրներ լուծելիս, ՎՊՀ Գիտական տեղեկագիր, 2019, N2, Պրակ Բ, էջ. 58-68:
10. Նիկողոսյան Գ., Մերոբյան Եր., Մկրտչյան Գ., Խալիֆյան Լ., Մաթեմատիկական և ֆիզիկական որոշ խնդիրների էվրիստիկ լուծումների մասին, ՇՊՀ Գիտական տեղեկագիր, 2019, N2 Պրակ Բ, էջ. 506-512:
11. Никогосян Г.С, Мкртчян Г.О., Серобян Ер.С., Информационные технологии как средство визуализации и интерпретации решений физических задач, Физика в школе и вузе: Международный сборник научных статей. – Выпуск 22. – СПб.: РГПУ им. А.И.Герцена, 2020. – 177 с. , с. – 3-8.
12. Գ. Նիկողոսյան, Մաթեմատիկական և ֆիզիկական տիպային և ոչ տիպային խնդիրների էվրիստիկ լուծումներն որպես ուսուցման արդյունավետության բարձրացման միջոց, ՎՊՀ Գիտական տեղեկագիր, 2020, N1, Պրակ Բ, էջ. 96-109:

Կարծում ենք ներկայացվող ձեռնարկը կնպաստի ինչպես ուսուցիչների պրոֆեսիոնալ պատրաստվածության աստիճանի բարձրացմանն, այնպես էլ սովորողների ստեղծագործական և էվրիստիկ մտածողության զարգացմանը:

Միրով կլսենք նաև հետաքրքրված ընթերցասերի օգտակար դիտողություններն ու առաջարկությունները, որոնք հնարավոր է ուղարկել ձեռնարկի հեղինակային խմբին հետևյալ էլեկտրոնային հասցեով՝ dzernark2020@mail.ru :

§1. ԴԻՐԻԽԼԵԻ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԵՎ ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ՄԿՋԲՈՒՆՔՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

1.1 Դիրիխլեի մաթեմատիկական սկզբունքը:

Սովորաբար մաթեմատիկական գրականությունում գերմանացի հայտնի մաթեմատիկոս Պետեր Գուստավ Լեժեն Դիրիխլեի (1805-1859) սկզբունքը տրվում է ճազարների և վանդակների օրինակով, այն է. եթե n հատ վանդակներում գտնվում են N թվով ճազարներ, ընդ որում $N > n$, ապա կգտնվի այնպիսի վանդակ, որում կլինեն մեկից ավել ճազարներ [9]: Այս սկզբունքի ճշմարտացիության մեջ հեշտությամբ կարելի է համոզվել, կիրառելով հակասող ենթադրության մեթոդը:

Ավելորդ չէ նշել, որ Դիրիխլեի սկզբունքի համաձայն ոչ թե որոշում ենք այն վանդակը, որում կան մեկից ավել ճազարներ, այլ միայն հիմնավորում ենք այդպիսի վանդակի գոյությունը:

Տարբեր խնդիրներում կիրառվում է նաև Դիրիխլեի ընդհանրացված սկզբունքը, համաձայն որի, եթե n հատ վանդակներում գտնվում են N թվով ճազարներ, ընդ որում $N > kn$, ապա կգտնվի այնպիսի վանդակ, որում կլինեն առնվազն $k + 1$ ճազարներ [45]:

Աշակերտի համար, ով առաջին անգամ է ծանոթանում այս սկզբունքին, առաջին հայացքից կարող է խիստ զարմանալի թվալ, թե ինչպե՞ս կարող է այս պարզ ու ակներև պնդումը դառնալ արդյունավետ և հուսալի «գործիք» տարաբնույթ բարդ խնդիրների լուծման ժամանակ: Ըստ էության, հիմնական դժվարությունը կայանում է նրանում, որ յուրաքանչյուր կոնկրետ խնդրում ի սկզբանե ամենևին պարզ չէ, նրանում

կիրառելի՞ է արդյոք Դիրիխլեի սկզբունքը, թե ոչ և բացի այդ, այս սկզբունքի կիրառման ցանկության դեպքում անգամ, խնդրի տեսքից ու դրվածքից ելնելով, այնքան էլ հեշտ չէ կռահել, թե նրանում ինչն է հանդես գալիս «ճագարի» դերում և ինչը «վանդակի» դերում: Դրա համար ֆորմալ առումով Դիրիխլեի սկզբունքին ծանոթանալուց զատ անհրաժեշտ է տրամաբանական խնդիրների լուծման որոշակի հմտություն, կարողություն և փորձառություն:

Ըստ էության, Դիրիխլեի սկզբունքի կիրառմամբ համեմատաբար պարզ խնդիրներ լուծելիս, ընդհանուր առմամբ, պետք է առաջնորդվել հետևյալ երկու մոտեցումներից որևէ մեկով.

- կամ, ելնելով տրված խնդրի դրվածքից և ելակետային պայմաններից, ընտրում ենք կոնկրետ «ճագարներ» ու «վանդակներ», ինչպես նաև այն «մեխանիզմը», համաձայն որի «ճագարներին» պետք է տեղադրենք «վանդակներում» և Դիրիխլեի սկզբունքի համաձայն ապացուցում ենք այն, ինչ պահանջվում է,
- կամ էլ կատարում ենք խնդրի ելակետային պնդմանը հակասող ենթադրություն և Դիրիխլեի սկզբունքի կիրառմամբ, դարձյալ ընտրելով «ճագարներ» ու «վանդակներ», հանգում ենք հակասության, ինչն էլ, բնականաբար, կապացուցի ելակետային պնդման ճշմարտացիությունը:

Որպես ասվածի հիմնավորում, դիտարկենք մի քանի խնդիրներ:

Խնդիր 1.1: Ապացուցել, որ 5x5 չափերի քառակուսային

աղյուսակի վանդակներում հնարավոր չէ տեղադրել -1 ; 0 և 1 թվերն այնպես, որ բոլոր տողերի, սյուների և անկյունագծերի վրա դասավորված թվերի գումարները լինեն միմյանցից տարբեր:

Լուծում: Ունենք 5 տող, 5 սյուն և 2 անկյունագիծ և, ուրեմն, հնարավոր գումարների քանակը 12 է: Այս հնարավոր գումարները դիտարկենք որպես «Ճագարներ»: Ըստ խնդրի պայմանի, յուրաքանչյուր տողում, սյունում կամ անկյունագծի վրա պետք է դասավորված լինեն հինգ թվեր, որոնցից յուրաքանչյուրը կարող է լինել -1 ; 0 կամ 1 , հետևաբար որևէ տողում, սյունում կամ անկյունագծի վրա դասավորված թվերի գումարը կարող է լինել -5 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 կամ 5 : Այս հնարավոր գումարներն էլ դիտարկենք որպես «վանդակներ»: Պայմանավորվենք յուրաքանչյուր «Ճագար»-գումար տեղադրել թվապես իրեն հավասար «վանդակում»: Ունենք $n = 11$ «վանդակներ» և $N = 12$ «Ճագարներ», հետևաբար, Դիրիխլեի սկզբունքի համաձայն, կգտնվի այնպիսի «վանդակ», որում կլինեն առնվազն երկու «Ճագարներ», այսինքն առնվազն երկու գումար միմյանց հավասար են, հետևաբար խնդրի պնդումն ապացուցված է:

Հավելենք, որ այս խնդիրն առաջադրված է եղել 1996 թվականի ՀՀ դպրոցականների մաթեմատիկայի օլիմպիադայի եզրափակիչ փուլում:

Նկատենք, որ խնդրում նշված պնդումն իրավացի է ուզած $n \times n$ չափի քառակուսային աղյուսակի համար:

Խնդիր 1.2: Դասարանում հայոց լեզվի թելադրությանը ներկա էր 29 աշակերտ, որոնցից Սերգեյը կատարել էր բոլորից շատ,

թվով 13 ուղղագրական սխալ, իսկ մնացած աշակերտներից յուրաքանչյուրը կատարել էին ավելի քիչ սխալներ: Ապացուցել, որ դասարանում կգտնվեն առնվազն երեք աշակերտներ, որոնք կատարած կլիներն նույն քանակի սխալներ [31]:

Լուծում: Որպես «վանդակներ» ընտրենք աշակերտների թույլ տված սխալների հնարավոր քանակները: Վերջիններս 14-ն են՝ 0; 1; 2; ...; 13 : Որպես «ճագարներ» դիտարկենք թելադրություն գրած աշակերտներին, որոնք թվով 29-ն են: Պայմանավորվենք յուրաքանչյուր «ճագար»-աշակերտ տեղադրել թվապես իր կատարած սխալների քանակին հավասար «վանդակում»: Այսպիսով, ունենք $n = 14$ «վանդակներ» և $N = 29 > 2 \cdot 14$ ($k = 2$) «ճագարներ», հետևաբար, Դիրիխլեի ընդհանրացված սկզբունքի համաձայն, կգտնվի այնպիսի «վանդակ», որում կլիներն առնվազն $k + 1 = 2 + 1 = 3$ «ճագարներ»-աշակերտներ, որոնք կատարած կլիներն նույն քանակի սխալներ (քանի որ գտնվում են նույն «վանդակում»), հետևաբար խնդրի պնդումն ապացուցված է:

Շատ դեպքերում, համեմատաբար ոչ պարզ խնդիրներում, ի սկզբանե հնարավոր չէ խնդրի ելակետային տվյալներից ելնելով միանգամից ընտրել կոնկրետ «ճագարներ» ու «վանդակներ», այլ պետք է նախապես կատարել որոշակի դատողություններ, որից հետո միայն փորձել կիրառել Դիրիխլեի սկզբունքը:

Այս համատեքստում դիտարկենք հետևյալ խնդիրը:

Խնդիր 1.3: Ապացուցել, որ կամայական 110 հատ բնական թվերի մեջ միշտ կգտնվեն այնպիսի երկուսը, որոնցում կհամընկնեն առնվազն երկու կարգային թվանշաններ [42]:

Լուծում: Քանի որ միանիշ բնական թվերը ինն են, ուստի

կամայական 110 բնական թվերի մեջ միշտ կգտնվեն առնվազն 101 ոչ միանիշ թվեր: Հեշտ է նկատել, որ կամայական 101 ոչ միանիշ թվերի մեջ գոնե երկուսի վերջին երկու թվանշանները, համաձայն Դիրիխլեի սկզբունքի կհամընկնեն, քանզի այդ թվերի վերջին երկու թվանշանների համար գոյություն ունի հնարավոր 100 տարբերակ՝ 00-ից մինչև 99-ը: Խնդրի պնդումն ապացուցված է:

Նշենք, որ Դիրիխլեի սկզբունքը պնդում է հավելորդով, երբ ճազարներն ավելին են, քան վանդակները: Ընդհանրացնելով, համանման պնդումներ կարելի է ձևակերպել նաև պակասորդով, երբ ճազարների քանակը պակաս է վանդակների քանակից կամ տրված որոշակի թվից:

Պնդում 1: Եթե n հատ վանդակներում գտնվում են N թվով ճազարներ, ընդ որում $N < n$, ապա կգտնվի այնպիսի վանդակ, որում ճազարներ չեն լինի:

Պնդում 2: Եթե n հատ վանդակներում գտնվում են N թվով ճազարներ, ընդ որում $N < \frac{n(n-1)}{2}$, ապա կգտնվեն այնպիսի երկու վանդակներ, որոնցում կլինեն միևնույն թվով ճազարներ:

Այս պնդումների ճշմարտացիության մեջ ևս հեշտությամբ կարելի է համոզվել, կիրառելով հակասող ենթադրության մեթոդը:

Նկատենք, որ խնդիր 1.1-ը կարելի է լուծել նաև պնդում 1-ի կիրառմամբ: Դրա համար բավական է նախապես կատարել խնդրում ապացուցման ենթակա պնդմանը հակասող ենթադրություն, որից հետո պետք է ուղղակի վերը նշած լուծման մեջ տեղերով փոխել «ճազարներին» և «վանդակներին»: Արդյունքում, պնդում 1-ի համաձայն առաջացած դատարկ

«վանդակի» առկայությունն էլ կփաստի խնդրի պնդման ճշմարտացիությունը:

Դիտարկենք ևս երկու խնդիր:

Խնդիր 1.4: 4×4 չափերի քառակուսու ներքին տիրույթում ընտրված են կամայական 15 կետեր (որոնք չեն գտնվում քառակուսու կողմերի վրա): Ապացուցել, որ տրված քառակուսու մեջ միշտ կարելի է ընտրել 1x1 չափերի միավոր քառակուսի այնպիսին, որ վերջինիս ներքին տիրույթում որևէ կետ չգտնվի [31]:

Լուծում: Տրված քառակուսին բաժանելով թվով 16 միավոր քառակուսիների և վերջիններս դիտարկելով որպես «վանդակներ», իսկ կամայական ձևով ընտրված 15 կետերը՝ որպես «ճագարներ», պնդում 1-ի համաձայն, «ճագարների» ցանկացած դասավորության դեպքում կունենանք դատարկ «վանդակ», որն էլ կհանդիսանա հենց որոնելի 1x1 չափերի միավոր քառակուսին: Պնդումն ապացուցված է:

Խնդիր 1.5: Հնարավոր է արդյոք թվով 60 միատեսակ մետաղադրամներ բաժանել 12 քսակներում այնպես, որ յուրաքանչյուր երկու քսակում լինեն տարբեր քանակի մետաղադրամներ [34]:

Լուծում: Ունենք $n = 12$ «վանդակներ»-քսակներ և $N = 60$;

$$N < \frac{n(n-1)}{2} = 66 \text{ «ճագարներ»-մետաղադրամներ, հետևաբար,}$$

համաձայն պնդում 2-ի, ուզած բաժանման դեպքում էլ կլինեն առնվազն երկու միևնույն քանակի մետաղադրամներ պարունակող քսակներ: Դեռ ավելին, ըստ էության կարող ենք

պնդել, որ անհրաժեշտ է առնվազն $\frac{n(n-1)}{2} = 66$

մետաղադրամ, որպեսզի հնարավոր լինի վերջիններս 12 քսակներում բաժանել այնպես, որ յուրաքանչյուր երկու քսակում լինեն տարբեր քանակի մետաղադրամներ (եթե, իհարկե, քսակում մետաղադրամի բացակայությունը չի արգելվում, հակառակ պարագայում խնդրում նշված պայմանին բավարարելու համար անհրաժեշտ կլինի ոչ թե 66 , այլ առնվազն $\frac{n(n-1)}{2} + 1 = 67$ մետաղադրամ):

Պատ.՝ ոչ, հնարավոր չէ:

Դիրիխլեի սկզբունքն իր արդյունավետ կիրառությունն ունի նաև այնպիսի երկրաչափական խնդիրներում, որոնցում որոշակի տիրույթում կամայական ձևով ընտրվում են ինչ որ քանակի կետեր և անհրաժեշտ է կամ գնահատել որևէ երկու կետերի միջև եղած հեռավորությունը, կամ էլ ապացուցել, որ գոյություն ունի տրված տիրույթի որոշակի մաս, որում վերը նշած կետերը բացակայում են: Այս համատեքստում դիտարկենք մի քանի խնդիրներ:

Խնդիր 1.6: Միավոր կողմով կանոնավոր եռանկյան ներքին տիրույթում ընտրված են կամայական 5 կետեր: Ապացուցել, որ այդ կետերի մեջ միշտ կգտնվեն այնպիսի երկուսը, որոնց միջև եղած հեռավորությունը չի գերազանցի 0,5-ը [31]:

Լուծում: Մինչ խնդրի լուծմանն անցնելը նկատենք, որ կանոնավոր եռանկյան ներքին տիրույթի կամայական երկու կետերի միջև եղած հեռավորությունը (համաձայն եռանկյան անհավասարության) փոքր է եռանկյան կողմի երկարությունից:

Տրված եռանկյունն իր միջին գծերով բաժանելով 0,5 երկարությամբ կողմով չորս կանոնավոր «փոքր» եռանկյունների և վերջիններս դիտարկելով որպես «վանդակներ», իսկ կամայական ձևով ընտրված 5 կետերը՝ որպես «ճագարներ» (թյուրըմբռնումից խուսափելու համար կպայմանավորվենք միջին գծերին պատկանող կետերն ընդգրկել միայն զուտ միջին գծերով ձևավորված «վանդակ»-եռանկյունում), Դիրիխլեի սկզբունքի համաձայն կարող ենք պնդել, որ կգտնվի 0,5 կողմով այնպիսի կանոնավոր «փոքր» եռանկյուն տիրույթ, որն իր մեջ կպարունակի առնվազն երկու կետ, հետևաբար հենց այդ երկու կետերի միջև եղած հեռավորությունն էլ չի գիրազանցի 0;5-ը: Պնդումն ապացուցված է:

Նմանատիպ խնդիրների լուծման ժամանակ, առհասարակ, ցանկալի է վարվել հետևյալ կերպ.

- նախապես պարզել, թե ինչպիսի Φ տիրույթին պատկանող կամայական երկու կետեր են, որ միմյանցից կարող են հեռացված լինեն առավելագույնը տրված չափով ,
- որից հետո ելակետային տիրույթը բաժանել այնպիսի մասերի, որոնց մեջ կլինեն Φ -ատիպ «փոքր» տիրույթներ և Դիրիխլեի սկզբունքի համաձայն ապացուցել, որ տրված կետերի մեջ միշտ կգտնվեն այնպիսի երկուսը, որոնք կպատկանեն որևէ «փոքր» Φ -ատիպ տիրույթի:

Որպես ասվածի հիմնավորում դիտարկենք ևս մեկ խնդիր:

Խնդիր 1.7: Միավոր կողով կանոնավոր եռանկյուն բուրգի արտաքին մակերևույթի վրա ընտրված են կամայական 9 կետեր: Ապացուցել, որ այդ կետերի մեջ միշտ կգտնվեն

այնպիսի երկուսը, որոնց միջև եղած հեռավորությունը չի գերազանցի 0,5-ը [42]:

Լուծում: Մինչ խնդրի լուծմանն անցնելը նկատենք, որ կանոնավոր եռանկյուն բուրգի արտաքին մակերևույթի վրա գտնվող կամայական երկու կետերի միջև եղած հեռավորությունը (համաձայն եռանկյան անհավասարության) չի կարող գերազանցել բուրգի կողմնային կողի երկարությանը:

Տրված կանոնավոր բուրգի յուրաքանչյուր նիստ, այն է՝ յուրաքանչյուր կանոնավոր եռանկյուն իր միջին գծերով բաժանենք չորս հավասար «փոքր» եռանկյունների: Արդյունքում կունենանք բուրգի յուրաքանչյուր գագաթն ընդգրկող թվով չորս 0,5 երկարությամբ «փոքր» եռանկյունների եռյակներ (որոնց ընդհանուր մակերևույթը պայմանականորեն անվանենք «փոքր» եռանկյուն բուրգերի կողմնային մակերևույթներ) ինչպես նաև բուրգի յուրաքանչյուր նիստին պատկանող և վերջինիս որևէ գագաթ չընդգրկող թվով չորս 0,5 երկարությամբ «փոքր» եռանկյուններ: Այս թվով 8 տիրույթները դիտարկելով որպես «վանդակներ», իսկ կամայական ձևով ընտրված 9 կետերը՝ որպես «ճագարներ», Դիրիխլեի սկզբունքի համաձայն կարող ենք պնդել, որ կգտնվի մի տիրույթ, այն է՝ «փոքր» եռանկյուն կամ «փոքր» եռանկյուն բուրգի կողմնային մակերևույթ, որն իր մեջ կպարունակի առնվազն երկու կետ, հետևաբար հենց այդ երկու կետերի միջև եղած հեռավորությունն էլ չի գերազանցի 0,5-ը: Պնդումն ապացուցված է:

Դիրիխլեի սկզբունքն իր օգտակար և արդյունավետ կիրառությունն ունի նաև բաժանելիության հետ կապված շատ խնդիրներում: Հաշվի առնելով այն փաստը, որ կամայական

բնական թիվ տրված n բնական թվի վրա բաժանելիս առաջացած մնացորդը կարող է ընդունել n հատ հնարավոր արժեքներ, այն է՝ $0; 1; 2; \dots; n-1$, Դիրիխլեի սկզբունքից անմիջականորեն հետևում է հետևյալ կարևոր պնդումը:

Պնդում 3: Կամայական $n+1$ հատ բնական թվերի մեջ միշտ կգտնվեն այնպիսի երկուսը, որոնք n -ի վրա բաժանելիս կտան նույն մնացորդը (և, հետևաբար, այդ նույն թվերի տարբերությունը կբաժանվի n -ի) [41]:

Վերջում քննարկենք ևս երկու խնդիր բաժանելիության վերաբերյալ:

Խնդիր 1.8: Ապացուցել, որ գոյություն ունեն 4 հիմքով և բնական ցուցիչներով երկու այնպիսի աստիճաններ, որոնց տարբերությունը բաժանվում է 2009-ի [23]:

Լուծում: Համաձայն պնդում 3-ի, բավական է դիտարկել 4 հիմքով, բնական ցուցիչներով, միմյանցից տարբեր, թվով $2009+1=2010$ հատ աստիճաններ և կարող ենք պնդել, որ նրանց մեջ կգտնվեն այնպիսի երկուսը, որոնց տարբերությունը կբաժանվի 2009-ի: Մասնավորաբար, որպես այդպիսիք կարելի է դիտարկել հետևյալ աստիճանները՝ $4^1; 4^2; 4^3; \dots; 4^{2010}$: Պնդումն ապացուցված է:

Նկատենք, որ խնդիր 1.8-ում 4 և 2009 թվերը կարելի է փոխարինել կամայական a և p բնական թվերով և, բացի այդ, եթե այդ երկու թվերը փոխադարձ պարզ են (այսինքն, եթե $(a; p)=1$), ապա կարող ենք նաև պնդել, որ $a^1; a^2; a^3; a^4; \dots$ հաջորդականության անդամների՝ p -ի վրա բաժանելիս առաջացած մնացորդների $r_1; r_2; r_3; r_4; \dots$

հաջորդականությունը պարբերական է:

Խնդիր 1.9: Ապացուցել, որ գոյություն ունի միայն 1-երից կազմված բնական թիվ, որը բաժանվում է 1973-ի [25]:

Լուծում: Ըստ պնդում 3-ի, բավական է դիտարկել միմյանցից տարբեր, թվով $1973 + 1 = 1974$ հատ կամայական բնական թվեր և կարող ենք պնդել, որ նրանց մեջ կգտնվեն այնպիսի երկուսը, որոնց տարբերությունը կբաժանվի 1973-ի: Մասնավորաբար, որպես այդպիսիք կարելի է դիտարկել հետևյալ թվերը՝
 $1; 11; 111; \dots; 11\dots1$: Ուստի, ելնելով վերոգրյալից, կարող
 1974 հատ

ենք պնդել, որ գոյություն ունեն m և n ($1974 \geq m > n$) բնական

թվեր այնպիսին, որ $11\dots1 - 11\dots1 = 11\dots1 \cdot 10^n : 1973$ և քանի որ
 $\begin{matrix} m \text{ հատ} & n \text{ հատ} & m-n \text{ հատ} \end{matrix}$

$(10; 1973) = 1$, ուրեմն $11\dots1 : 1973$: Պնդումն ապացուցված է:
 $\begin{matrix} m-n \text{ հատ} \end{matrix}$

Նկատենք, որ խնդիր 1.9-ում 1973-ը կարելի է փոխարինել 10-ի հետ փոխադարձ պարզ ուզած բնական թվով և, դեռ ավելին, նմանատիպ պնդում կարելի է ձևակերպել ոչ միայն միայն 1-երից կազմված թվերի համար, այլ նաև կամայական, միննույն թվանշանից կազմված բնական թվերի համար:

1.2 Շիրիլյեի ֆիզիկական սկզբունքը:

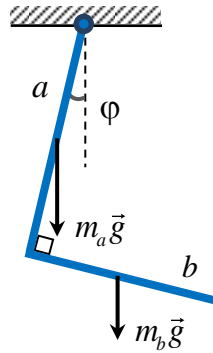
Ֆիզիկայի դասընթացից հայտնի է, որ եթե մեխանիկական համակարգում գործում են միայն կոնսերվատիվ ուժեր, ապա նրա պոտենցիալ էներգիայի մինիմումի վիճակը հանդիսանում է կայուն հավասարակշռության վիճակ: Այլ կերպ ասած, մեխանիկական համակարգը ձգտում է նվազագույն պոտենցիալ

Էներգիայով վիճակի: Ասվածն արտահայտում է պոտենցիալ էներգիայի մինիմումի, կամ որ նույնն է՝ Դիրիխլեի ֆիզիկական սկզբունքը [47]: Պարզվում է, որ վերջինս կարելի է կիրառել ստատիկայի որոշ խնդիրների լուծման համար: Դիրիխլեի սկզբունքի իրավացիության մեջ կարելի է հեշտորեն համոզվել՝ կատարելով հակասող ենթադրություն: Իրոք, ենթադրենք, թե համակարգը, որում գործում են միայն կոնսերվատիվ ուժեր, կարող է պոտենցիալ էներգիայի մինիմումով վիճակից ինքնակամ շարժվել և հետևաբար ձեռք բերել կինետիկ էներգիա: Արդյունքում կմեծանան մեխանիկական համակարգի և՛ կինետիկ և՛ պոտենցիալ էներգիաները, ուրեմն կաճի նաև լրիվ մեխանիկական էներգիան: Վերջինս հնարավոր չէ, քանի որ միայն պոտենցիալային ուժերով փոխազդող մարմինների համակարգի լրիվ մեխանիկական էներգիան պահպանվում է: Ստացված հակասությունը վկայում է այն մասին, որ մեր սկզբնական ենթադրությունը սխալ էր, և համակարգը ինքնակամ չի կարող դուրս գալ պոտենցիալ էներգիայի մինիմումի վիճակից: Այսպիսով, վերջինս կայուն հավասարակշռության վիճակ է:

Այժմ դիտարկենք ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացում հանդիպող մի քանի ոչ տիպային խնդիրներ, որոնց լուծման ժամանակ կկիրառենք առաջարկվող Դիրիխլեյի ֆիզիկական սկզբունքը:

Ստորև քննարկենք մի խնդիր, որը Օ. Յա. Մավչենկոյի խմբագրած հայտնի խնդրագրքի **2.8.23** խնդրի ընդհանրացումն է [21]:

Խնդիր 1.10: Ծանր ձողը ծռում են 90° անկյան տակ և ազատ կախում են մի ծայրից (նկ. 1.1): Ձողի վերին և ստորին մասերի երկարությունները համապատասխանաբար a և b են: Ուղղաձիգի հետ ի՞նչ φ անկյուն կկազմի ձողի վերին մասը:



Նկ. 1.1

Լուծում: Եթե ձողի միավոր երկարության զանգվածը (զծային խտություն) նշանակենք λ -ով, իսկ պոտենցիալ էներգիայի գրոյական մակարդակն ընտրենք կախման կետով անցնող հորիզոնականը (նկ. 1.1), ապա ձողի ծանրության ուժով պայմանավորված պոտենցիալ էներգիան կորոշվի հետևյալ բանաձևով.

$$W = -\lambda a g \frac{a}{2} \cos \varphi - \lambda b g \left(a \cos \varphi + \frac{b}{2} \sin \varphi \right):$$

Համաձայն պոտենցիալ էներգիայի մինիմումի կամ Դիրիխլեի սկզբունքի՝ ձողի կայուն հավասարակշռության վիճակում նրա պոտենցիալ էներգիան պետք է ընդունի նվազագույն արժեք: Արդյունքում խնդիրը բերվում է φ անկյան այն արժեքի որոշմանը, որի դեպքում

$$f(\varphi) = -a(a + 2b)\cos \varphi - b^2 \sin \varphi$$

ֆունկցիան ընդունում է նվազագույն արժեք: Օժանդակ անկյան ներմուծմամբ $f(\varphi)$ եռանկյունաչափական ֆունկցիայի նվազագույն արժեքի որոշումը հանրահաշվի դպրոցական դասընթացից հայտնի ստանդարտ գործընթաց է [8], որի արդյունքում որոնելի φ անկյան համար ստացվում է հետևյալ

արտահայտությունը՝

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b^2}{a(a+2b)} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b^2}{a(a+2b)} :$$

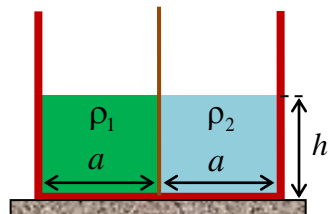
Պատ.՝ $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b^2}{a(a+2b)} :$

Անշուշտ, այս խնդիրը կարելի է լուծել նաև ստատիկայի ավանդական մեթոդներով: Օրինակ կարելի է, հաշվի առնելով ձողի մասերի վրա ազդող ծանրության ուժերը, գրել մոմենտների կանոնը կախման կետով անցնող և գծագրի հարթությանն ուղղահայաց առանցքի նկատմամբ՝

$$m_a g \frac{a}{2} \sin \varphi = m_b g \left(\frac{b}{2} \cos \varphi - a \sin \varphi \right),$$

որտեղ m_a - ն և m_b - ն համապատասխանաբար ձողի a և b մասերի զանգվածներն են (նկ. 1.1): Այնուհետև, հաշվի առնելով, որ $m_a = a\lambda$; $m_b = b\lambda$, և կատարելով տարրական մաթեմատիկական ձևափոխություններ, որոնելի անկյան համար կարելի է ստանալ նույն արտահայտությունը:

Խնդիր 1.11: $2a$ երկարությամբ անոթը շարժական միջնորմի օգնությամբ բաժանված է երկու հավասար մասերի: Սկզբում միջնորմն ամրացնում են և անոթի երկու մասերը լցնում են h հավասար բարձրությամբ ρ_1 և ρ_2



Նկ. 1.2

($\rho_2 > \rho_1$) խտություններով հեղուկներ (նկ. 1.2): Ինչ x չափով կտեղափոխվի միջնորմը այն բաց թողնելուց հետո: Շփումն

անտեսել: Համարել, որ պրոցեսի ընթացքում հեղուկները անոթից չեն թափվում և միջնորմը չի թեքվում [հեղինակային]:

Լուծում: Համաձայն Դիրիխլեի սկզբունքի հավասարակշռության վիճակում միջնորմը կգրավի այնպիսի դիրք, որ հեղուկների համակարգի պոտենցիալ էներգիան ընդունի նվազագույն արժեք: Զրոյական մակարդակն ընտրելով անոթի հատակով անցնող հորիզոնականը, հեղուկների գումարային պոտենցիալ էներգիան կլինի՝

$$W = \frac{m_1 g h_1}{2} + \frac{m_2 g h_2}{2},$$

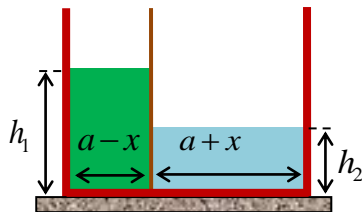
որտեղ m_1 -ը և m_2 -ը, համապատասխանաբար, ρ_1 և ρ_2 խտություններով հեղուկների զանգվածներն են, իսկ h_1 - ն ու h_2 - ը՝ դրանց բարձրությունները (նկ. 1.3): Հաշվի առնելով, որ

$$h_1(a-x) = ha,$$

$$h_2(a+x) = ha,$$

պոտենցիալ էներգիայի համար ստանում ենք.

$$W = \frac{g}{2} h^2 a^2 l \left(\frac{\rho_1}{a-x} + \frac{\rho_2}{a+x} \right),$$



Նկ. 1.3

որտեղ l - ը անոթի լայնությունն է:

Համակարգի պոտենցիալ էներգիան x -ից կախված ֆունկցիա է և նվազագույն արժեքի դեպքում նրա ածանցյալը ըստ x -ի պետք է հավասար լինի զրոյի՝

$$\left(\frac{\rho_1}{a-x} + \frac{\rho_2}{a+x} \right)' = 0:$$

Վերը գրվածից միջնորմի որոնելի տեղափոխության համար

ստանում ենք.
$$x = \frac{a(\sqrt{\rho_2} - \sqrt{\rho_1})}{\sqrt{\rho_2} + \sqrt{\rho_1}}:$$

Պատ.՝
$$x = \frac{a(\sqrt{\rho_2} - \sqrt{\rho_1})}{\sqrt{\rho_2} + \sqrt{\rho_1}}:$$

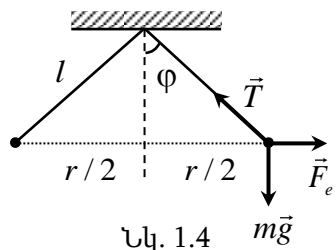
Այս և նմանատիպ խնդիրները սովորաբար լուծում են «ուժային» եղանակով՝ միացի հավասարակշռության դիրքում պահանջելով հեղուկների գործադրած ճնշման ուժերի հավասարությունը: Այս դեպքում վերջինս գրվում է հետևյալ պարզ տեսքով՝

$$\frac{\rho_1 g h_1}{2} l h_1 = \frac{\rho_2 g h_2}{2} l h_2:$$

Այնուհետև, հաշվի առնելով $h_1(a-x) = ha$, $h_2(a+x) = ha$, պայմանները ու կատարելով ոչ բարդ մաթեմատիկական ձևափոխություններ, կարելի է որոշել միացի x տեղաշարժը:

Դասավանդման փորձը վկայում է այն մասին, որ չնայած այս դեպքում լուծման ավանդական եղանակի ռացիոնալությանը, սովորողներից շատերը նման մոտեցման դեպքում կատարում են կոպիտ սխալ և ճնշման ուժերի հավասարության փոխարեն դիտարկում են ճնշումների հավասարությունը:

Խնդիր 1.12: Երկու միատեսակ գնդիկներ օդում կախված են $l = 0.2$ մ երկարությամբ միատեսակ բարակ թելերից, որոնք ամրացված են մեկ կետում: Գնդիկներից յուրաքանչյուրին $q = 4 \cdot 10^{-6}$ Կլ լիցք հաղորդելուց հետո նրանք իրարից հեռացան:



Նկ. 1.4

Որոշել յուրաքանչյուր գնդիկի զանգվածը, եթե հավասարակշռության վիճակում թելերը կազմում են $2\varphi = 60^\circ$ անկյուն [14]:

Լուծում: Եթե պոտենցիալ էներգիայի զրոյական մակարդակն ընտրենք թելերի կախման կետով անցնող հորիզոնականը, ապա գնդիկների համակարգի ծանրության ուժով պայմանավորված պոտենցիալ էներգիան կորոշվի $W_g = -2mgl \cos \varphi$ բանաձևով (նկ. 1.4): Լիցքավորված գնդիկների էլեկտրաստատիկ փոխազդեցությամբ պայմանավորված պոտենցիալ էներգիայի համար ունենք $W_e = kq^2 / r$ բանաձևը, որտեղ r - ը գնդիկների կենտրոնների հեռավորությունն է՝ $r = 2l \sin \varphi$ (նկ. 1.4): Այսպիսով, համակարգի լրիվ պոտենցիալ էներգիայի համար ստանում ենք հետևյալ արտահայտությունը.

$$W = -2mgl \cos \varphi + k \frac{q^2}{r} :$$

Համաձայն Դիրիխլեի ֆիզիկական սկզբունքի, համակարգի կայուն հավասարակշռության վիճակում նրա պոտենցիալ էներգիան պետք է ընդունի նվազագույն արժեք: Վերջինս կբավարարվի, եթե պոտենցիալ էներգիայի ածանցիալն ըստ φ անկյան հավասար լինի զրոյի՝

$$\left(-2mgl \cos \varphi + k \frac{q^2}{r} \right)' = 0,$$

որտեղից էլ ստանում ենք՝

$$\frac{\sin^3 \varphi}{\cos \varphi} = \frac{kq^2}{4l^2 mg} :$$

Վերջին արտահայտությունից էլ կարելի է որոշել գնդիկների

գանգվածը՝ $m = \frac{kq^2 \cos \varphi}{4l^2 g \sin^3 \varphi} = 0,63$ կգ:

Պատ.՝ 0,63կգ:

Ինչպես տեսանք, խնդիրը լուծվեց առանց հավասարակշռության վիճակի «ուժային» վերլուծության: Այս խնդիրն իհարկե ավանդաբար լուծում են սովորական «ուժային» մեթոդով: Նման մոտեցման ժամանակ պատկերում են գնդիկներից մեկի վրա ազդող բոլոր ուժերը (նկ. 1.4) և գրում հավասարակշռության պայմանը վեկտորական տեսքով.

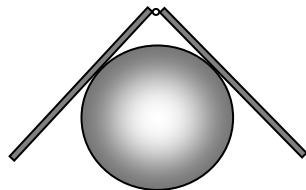
$$\vec{T} + m\vec{g} + \vec{F}_e = 0,$$

որտեղ \vec{T} - ն թելի լարման ուժն է, $m\vec{g}$ - ն՝ ծանրության ուժը, իսկ \vec{F}_e -ն՝ մյուս գնդիկի կողմից դիտարկվող գնդիկի վրա ազդող կուլոնյան վանողության ուժը: Այնուհետև վերջինս պրոյեկտում են հորիզոնական և ուղղաձիգ առանցքների վրա և ստացված

$$T \sin \varphi = k \frac{q^2}{r^2}, \quad T \cos \varphi = mg,$$

հավասարությունների հարաբերման ու մաթեմատիկական սարքական ձևավոխությունների արդյունքում որոշում գնդիկների որոնելի գանգվածը:

Խնդիր 1.13: R շառավղով հարթ, հորիզոնական գլանի վրա դրված են հողակապով ամրացված երկու համասեռ ձողեր: Չողերը գտնվում են հավասարակշռության վիճակում, երբ նրանց միջև կազմած անկյունը 2φ է (նկ. 1.5): Որքա՞ն է յուրաքանչյուր ձողի l երկարությունը



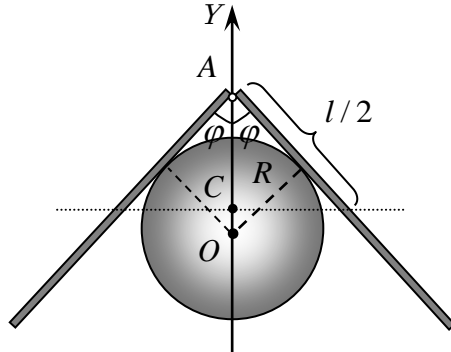
Նկ. 1.5

[21]:

Լուծում: OY կոորդինատային ուղիղն ուղղորդենք ուղղաձիգ դեպի վեր՝ նրա O սկզբնակետն ընտրելով գլանի առանցքի վրա (տես նկ. 1.6): Այդ դեպքում պարզ է, որ A հողակապի y_A կոորդինատը որոշվում է

$$y_A = \frac{R}{\sin \varphi}$$

առնչությամբ: Նկար 1.6 - ից երևում է, որ յուրաքանչյուր ձողի, հետևաբար և ձողերի համակարգի զանգվածների C կենտրոնը A հողակապից ներքև է



Նկ. 1.6

գտնվում $\frac{l}{2} \cos \varphi$ չափով: Հետևաբար համակարգի զանգվածների կենտրոնի y_C կոորդինատը կլինի

$$y_C = y_A - \frac{l}{2} \cos \varphi = \frac{R}{\sin \varphi} - \frac{l}{2} \cos \varphi:$$

Որպեսզի ձողերի համակարգի պոտենցիալ էներգիան ընդունի նվազագույն արժեք անհրաժեշտ է, որ նվազագույն արժեք ընդունի դրանց զանգվածների կենտրոնի y_C կոորդինատը: y_C -ի նվազագույն լինելուց հետևում է, որ նրա ածանցիալը ըստ φ անկյան հավասար է զրոյի՝

$$y'_C(\varphi) = \left(\frac{R}{\sin \varphi} - \frac{l}{2} \cos \varphi \right)' = 0,$$

որտեղից էլ ստանում ենք՝ $l = 2R \cos \varphi / \sin^3 \varphi$:

Պատ.՝ $l = 2R \cos \varphi / \sin^3 \varphi$:

Ինչպես տեսանք խնդիրը լուծվեց առանց որևէ ուժի

պատկերման և հավասարակշռության պայմանի «ուժային» վերլուծության: Այս խնդիրը իհարկե կարելի է լուծել նաև սովորական «ստատիկայի» մեթոդներով: Կարծում ենք, որ մեր կողմից ներկայացված լուծումը օգտակար է ներառարկայական կապերի վերհանման տեսակետից և կրկին անգամ ցույց է տալիս ֆիզիկայի տարբեր բաժինների ու դրանցում քննարկվող գաղափարների փոխկապակցվածությունը:

Ամփոփելով կարող ենք արձանագրել, որ Դիրիխլեի թե մաթեմատիկական, և թե ֆիզիկական սկզբունքները հնարավորություն են ընձեռում մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացում դիտարկվող տարբեր տիպային և ոչ տիպային խնդիրների լուծման ժամանակ կիրառել նոր մոտեցում՝ խուսափելով հայտնի «ավանդական» եղանակներից: Ըստ էության, Դիրիխլեի մաթեմատիկական և ֆիզիկական սկզբունքներն իրենց ձևակերպման և էության պարզությամբ հանդերձ, բավական արդյունավետ «գործիքներ» կարող են հանդիսանալ մաթեմատիկական և ֆիզիկական տարբեր խնդիրների լուծման ժամանակ:

§2. ԻՆՎԱՐԻԱՆՏԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՈՐՈՇ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ

Ընդհանրապես, որևէ ձևափոխության նկատմամբ ինչ որ մեծություն կոչվում է ինվարիանտ, եթե վերջինս տվյալ ձևափոխության ժամանակ մնում է անփոփոխ [45]:

Մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի տարբեր խնդիրներում երբեմն հանդիպում են այնպիսի մեծություններ (կամ մեծությունների այնպիսի հատկություններ), որոնք տվյալ խնդրի պայմաններում մնում են անփոփոխ՝ ինվարիանտ, ընդ որում այդ մեծությունների ինվարիանտ լինելը պայմանավորված է լինում ոչ թե պահպանման որևէ օրենքով կամ ինչ որ թեորեմի ուժով, այլ հենց տվյալ խնդրի դրվածքով կամ ելակետային պայմաններով: Առանձին դեպքերում հենց այդպիսի ինվարիանտների կիրառումն էլ դառնում է անհրաժեշտ և որոշիչ տվյալ խնդիրների լուծման ժամանակ:

Ըստ էության, ինվարիանտի կիրառումը կարելի է համարել մեթոդ, ելնելով Պոյայի այն հայտնի դիտարկումից, համաձայն որի ամեն մի հնարք, որը կիրառելի է մեկից ավել դեպքերում, կարելի է համարել մեթոդ [44]:

Աշակերտի համար, ով առաջին անգամ է ծանոթանում այս մեթոդին, առաջին հայացքից կարող է խիստ զարմանալի թվալ, թե ինչպե՞ս կարող է ինվարիանտը դառնալ արդյունավետ և օգտակար «գործիք» տարաբնույթ բարդ խնդիրների լուծման ժամանակ: Ըստ էության, հիմնական դժվարությունը կայանում է նրանում, որ յուրաքանչյուր կոնկրետ խնդրում ի սկզբանե ամենևին պարզ չէ, նրանում կիրառելի՞ է արդյոք այս մեթոդը թե ոչ և բացի այդ, այս մեթոդի կիրառման ցանկության դեպքում

անգամ, խնդրի տեսքից ու դրվածքից ելնելով, այնքան էլ հեշտ չէ կռահել, թե նրանում ի՞նչն է հանդես գալիս ինվարիանտի դերում: Դրա համար ֆորմալ առումով այս մեթոդին ծանոթանալուց զատ անհրաժեշտ է տրամաբանական խնդիրների լուծման որոշակի հմտություն, կարողություն և փորձառություն:

Ինչպես վերը նշեցինք, շատ խնդիրներում հանդիպում են այնպիսի մեծություններ կամ տարբեր մեծությունների այնպիսի հատկություններ, որոնք, ելնելով տվյալ խնդրի դրվածքից կամ ելակետային պայմաններից, մնում են անփոփոխ՝ ինվարիանտ: Ըստ այդմ, առանձնացնենք ինվարիանտի երկու «տարատեսակ», այն է՝ առկա և փնտրվող: Պայմանավորվենք.

- եթե խնդրի ելակետային պայմաններում բացահայտ կամ ոչ բացահայտ ձևով նշվում է ինչ որ մեծության (կամ վերջինիս ինչ որ հատկության) անփոփոխ լինելու մասին, ապա տվյալ մեծությանը համարենք առկա ինվարիանտ դիտարկվող խնդրի պայմաններում,
- եթե խնդրի ելակետային պայմաններում ի սկզբանե բացակայում է որևէ անփոփոխ մեծություն, սակայն որոշակի ձևափոխություններից կամ տրամաբանական դատողություններից հետո հնարավոր է գտնել այդպիսին, ապա տվյալ մեծությանը համարենք փնտրվող ինվարիանտ դիտարկվող խնդրի պայմաններում:

Նախապես քննարկենք ֆիզիկայի և մաթեմատիկայի դորոցական դասընթացում դիտարկվող այնպիսի խնդիրներ, որոնցում ի սկզբանե առկա է որոշակի անփոփոխ մեծություն, որից հետո միայն կքննարկենք խնդիրներ, որոնցում կարիք կա ինվարիանտի փնտրման: Ընդ որում, ավելորդ չէ նշել, որ եթե

խնդրում հաջողվում է գտնել ինվարիանտ (առկա կամ փնտրվող), ապա պետք է փորձել այն անմիջականորեն կիրառել տվյալ խնդրի լուծման ընթացքում:

Խնդիր 2.1: Ճկուն հաղորդալարից պատրաստված է $a = 0,1$ մ կողմով քառակուսաձև շրջանակ, որի դիմադրությունը $R = 10^5$ Օմ է: Շրջանակը տեղադրված է $B = 5$ Տլ ինդուկցիայով համասեռ մագնիսական դաշտում այնպես, որ շրջանակի հարթությունն ուղղահայաց է մագնիսական ինդուկցիայի վեկտորին: Ի՞նչ Δq լիցք կհոսի շրջանակով, եթե շրջանակը թողնելով նույն հարթության մեջ, վերջինիս տանք հավասարակողմ եռանկյան տեսք [4]:

Լուծում: Հեշտ է նկատել, որ տվյալ խնդրում գործ ունենք առկա (խնդրի էլակետային տվյալներից բխող) ինվարիանտի հետ. ակնհայտ է, որ Ճկուն հաղորդալարին ինչ տեսք էլ որ տանք, վերջինիս երկարությունը կմնա հաստատուն: Հետևաբար, շրջանակի ձևը փոխելուց հետո ստացված b կողմով կանոնավոր եռանկյան և տրված a կողմով քառակուսու պարագծերի հավասարությունից կստանանք՝

$$b = \frac{4}{3}a, \text{ որտեղից էլ շրջանակ թափանցող մագնիսական}$$

դաշտի հոսքի սկզբնական և վերջնական արժեքների համար կստանանք՝ $\Phi_1 = Ba^2, \Phi_2 = 4\sqrt{3}Ba^2/9$: Մյուս կողմից, համաձայն Ֆարադեյի էլեկտրամագնիսական մակաձման և լրիվ շրթայի համար Օհմի օրենքների, շրջանակում մակաձված էլԵՈՒ-ն՝

$$\varepsilon = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta t} = \frac{\Delta q}{\Delta t} R, \text{ որտեղից որոնելի } \Delta q \text{ լիցքի}$$

համար կստանանք՝ $\Delta q = 1,2 \cdot 10^{-7}$ Կլ:

Պատ.՝ $\Delta q = 1,2 \cdot 10^{-7}$ Կլ:

Նկատենք, որ խնդիրը կարելի է ընդհանրացնել և դիտարկել կամայական կանոնավոր բազմանկյան կամ շրջանագծի տեսք ունեցող կոնտուրների համար:

Խնդիր 2.2: Դասարանում բացակաների քանակը կազմում է ներկաների քանակի $1/6$ -րդ մասը: Այն բանից հետո, երբ դասասենյակից մեկ աշակերտ դուրս եկավ, բացակաների քանակը կազմեց ներկաների քանակի $1/5$ -րդ մասը: Պարզել, թե քանի՞ աշակերտ է սովորում տվյալ դասարանում [25]:

Լուծում: Պարզ է, որ այս խնդիրը հեշտությամբ կարելի է լուծել փոփոխականներ ներմուծելով և վերջիններիս նկատմամբ համապատասխան հավասարումներ կազմելով: Սակայն ստորև կվարվենք այլ կերպ:

Չնայած խնդրում բացահայտ չի նշվում որևէ մեծության անփոփոխ լինելու մասին, սակայն հեշտ է նկատել, որ ելնելով խնդրի դրվածքից, գործ ունենք առկա (ոչ բացահայտ) ինվարիանտի հետ, այն է՝ տվյալ դասարանի աշակերտների ընդհանուր քանակը: Փորձենք թե սկզբում և թե վերջում ներկաների և բացակաների քանակները գնահատել ըստ այս առկա ինվարիանտի: Քանի որ սկզբում բացակաների քանակը 6 անգամ փոքր էր ներկաների քանակից, կնշանակի բացակաները կազմում էին դասարանի բոլոր աշակերտների քանակի $1/7$ -րդ մասը: Նույն կերպ, դասասենյակից մեկ աշակերտի դուրս գալու արդյունքում բացակաները կկազմեն դասարանի բոլոր աշակերտների քանակի $1/6$ -րդ մասը, կնշանակի մեկ աշակերտը կազմում է դասարանի ընդհանուր

աշակերտների քանակի $\frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$ -րդ մասը, և ուրեմն, դասարանում սովորում է 42 աշակերտ:

Պատ. 42 աշակերտ:

Այժմ քննարկենք խնդիրներ, որոնցում ի սկզբանե առկա չէ խնդրի ելակետային տվյալներից բխող որևէ ինվարիանտ, սակայն խնդրի վերլուծության և տրամաբանական դատողությունների միջոցով հնարավոր է «փնտրել» ու գտնել այդպիսի մեծություն և վերջինիս կիրառմամբ էլ լուծել առաջադրված խնդիրը:

Խնդիր 2.3: $h = 3$ մ բարձրությամբ հերմետիկ փակված ամանն ամբողջությամբ լցված է ջրով այնպես, որ նրա հատակին կա օդի երկու միանման պղպջակ: Ամանի հատակին ճնշումը $P_0 = 0,15$ ՄՊա է: Ինչքան կդառնա ճնշումը հատակին, եթե պղպջակներից մեկը բարձրանա վերև, իսկ մյուսը մնա ամանի հատակին [21]:

Լուծում: Պղպջակների սկզբնական ծավալները նշանակենք V_0 -ով, պրոցեսից հետո վեր բարձրացած պղպջակի ծավալը նշանակենք V_1 -ով, իսկ ներքևում մնացածինը՝ V_2 -ով: Պարզ է, որ ամանի ջուրը կարելի է պղպջակների համար համարել թերմոստատ: Ըստ այդմ և պրոցեսի սկզբում և վերջում պղպջակներում եղած օդի ջերմաստիճանը նույնն է և հավասար է ջրի ջերմաստիճանին: Համաձայն խնդրի պայմանի՝ ամանը հերմետիկորեն փակված է, հետևաբար կարող ենք եզրակացնել, որ համակարգի ծավալն անփոփոխ է: Քանի որ ջուրն անսեղմելի է, ապա պետք է հաստատուն մնա նաև

պղպջակների ծավալների գումարը՝ $V_1 + V_2 = 2V_0$: Փաստորեն որոնելի փնտրվող ինվարիանտը պրոցեսի վերջում պղպջակների գումարային ծավալն է:

Եթե պրոցեսի վերջում ամանի հասակում հաստատված ճնշումը նշանակենք P -ով, ապա Բոյլ-Մարիոտտի օրենքի համաձայն կունենանք.

$$\text{վեր բարձրացած պղպջակի համար՝ } (P - \rho gh)V_1 = P_0V_0,$$

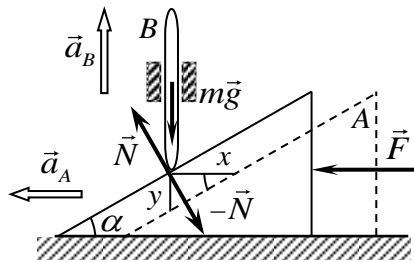
$$\text{ներքևում մնացած պղպջակի համար՝ } PV_2 = P_0V_0:$$

Այս հավասարումներից արտաքսելով V_1 -ն ու V_2 -ը և ի նկատի ունենալով վերջիններիս գումարի ինվարիանտ լինելը, ի վերջո որոնելի P ճնշման համար կստանանք՝ $P = 1,7 \text{ ՄՊա}$:

Պատ.՝ $P = 1,7 \text{ ՄՊա}$:

Խնդիր 2.4: F

հորիզոնական ազդող ուժը շարժման մեջ է դնում A սեպն ու B ձողը: Սեպի թեքման անկյունը α է, սեպի և ձողի զանգվածները՝ m (տես նկ. 2.1): Գտնել սեպի արագացումը և սեպի ու ձողի փոխազդեցության ուժը, եթե շփումը բացակայում է [21]:



Նկ. 2.1

Լուծում: Հեշտ է նկատել, որ սեպի և ձողի շարժումները փոխկապակցված են. ցանկացած t ժամանակում եթե սեպը տեղաշարժվի x չափով, ապա ձողը կբարձրանա $y = xt g \alpha$ չափով և ուրեմն $\frac{y}{x} = t g \alpha = const$ հարաբերությունը սեպի և

ձողի շարժման ողջ ընթացքում ինվարիանտ է: Հետևաբար կարող ենք պնդել, որ ձողի և սեպի տեղափոխությունների հարաբերությունը ևս ժամանակի ցանկացած պահին հաստատուն մեծություն է և հավասար է α անկյան տանգենսին: Պարզ է, որ նման կապ գոյություն ունի նաև ժամանակի ցանկացած պահին այդ մարմինների ակնթարթային արագությունների և արագացումների միջև, այսինքն՝ $a_B = a_A \operatorname{tg} \alpha$: Չողը դեպի վեր շարժվում է a_B արագացմամբ, որը պայմանավորված է սեպի կողմից նրա վրա ազդող \vec{N} հակազդեցության ուժի ուղղաձիգ բաղադրիչի և $m\vec{g}$ ծանրության ուժի մոդուլի տարբերությամբ՝ $N \cos \alpha - mg = ma_B$: Սեպին հորիզոնական a_A արագացում հաղորդում են \vec{F} ուժն ու նրա վրա ազդող $-\vec{N}$ ուժի հորիզոնական բաղադրիչը՝ $F - N \sin \alpha = ma_A$: Լուծելով ստացված հավասարումների համակարգը, կստանանք՝ $a_A = (F \cos \alpha - mg \sin \alpha) \cos \alpha / m$, $N = F \sin \alpha + mg \cos \alpha$:

Պատ.՝ $a_A = (F \cos \alpha - mg \sin \alpha) \cos \alpha / m$;
 $N = F \sin \alpha + mg \cos \alpha$:

Խնդիր 2.5: Տրված AB ուղղի վրա կամայական ձևով նշված են թվով 45 տարբեր կետեր, որոնք չեն պատկանում $[AB]$ հատվածին: Ապացուցել, որ այդ բոլոր կետերի A կետից ունեցած հեռավորությունների գումարը չի կարող հավասար լինել նրանց՝ B կետից ունեցած հեռավորությունների գումարին [31]:

Լուծում: AB հատվածի երկարությունը նշանակենք a -ով:

Նկատենք, որ $[AB]$ հատվածին չպատկանող, բայց AB ուղղին պատկանող կամայական M կետի համար $MA - MB = \pm a$ և ուրեմն այս խնդրի պայմաններում $|MA - MB|$ մեծությունն ինվարիանտ է, հետևաբար տրված 45 տարբեր կետերն ինչպիսին էլ լինեն, նրանց A կետից ունեցած հեռավորությունների գումարի և B կետից ունեցած հեռավորությունների գումարի տարբերությունն իրենից կներկայացնի թվով 45 գումարելիներից կազմված այսպիսի գումար՝ $\pm a \pm a \pm \dots \pm a \neq 0$, որը, բնականաբար, տարբեր է զրոյից և ուրեմն, նշված գումարները միմյանց հավասար չեն:

Նկատենք, որ խնդիրը կարելի է ընդհանրացնել և դիտարկել կամայական քանակի կենտ թվով կետեր և միևնույն երկարությամբ, ցանկացած քանակի կենտ թվով հատվածներ:

Խնդիր 2.6: Հնարավո՞ր է արդյոք $3 \times 3 \times 1$ չափսերի 77 հատ աղյուսները դասավորել $7 \times 9 \times 11$ չափսերի արկղում [31]:

Լուծում: Ենթադրենք հնարավոր է: Այդ դեպքում դիտարկենք արկղի 7×11 նիստին առընթեր 1 հաստությամբ շերտը: Պարզ է, որ տրված աղյուսներից մի քանիսը կամ ամբողջությամբ կգտնվեն այդ շերտում (այսինքն այդ շերտում կգրադեցնեն թվով ինը $1 \times 1 \times 1$ չափսերի միավոր խորանարդիկներ) կամ էլ այդ շերտից կգրադեցնեն թվով երեք $1 \times 1 \times 1$ չափսերի միավոր խորանարդիկներ և ուրեմն, ցանկացած դասավորության դեպքում նշված շերտում կլինեն 3 -ին բազմապատիկ թվով $1 \times 1 \times 1$ չափսերի միավոր խորանարդիկներ, ինչը հնարավոր չէ, քանի որ $7 \cdot 11 = 77 \nmid 3$, հետևաբար թվով 77 հատ $3 \times 3 \times 1$ չափսերի աղյուսներով հնարավոր չէ ամբողջությամբ լրացնել

7x9x11 չափերի արկղը:

Պատ.՝ ոչ, հնարավոր չէ:

Հավելենք, որ հանդիպում են նաև այնպիսի խնդիրներ, որոնցում ինվարիանտ է մնում ոչ թե կոնկրետ մեծությունը կամ մեծության որևէ հատկությունը, այլ ինվարիանտ է մնում փոփոխվող մեծության փոփոխման դինամիկան, այսինքն փոփոխվող մեծությունն իր փոփոխման ընթացքում կամ միշտ աճում է, կամ միշտ նվազում, ասել է թե՛ փոփոխվող մեծությունը փոփոխվում է մոնոտոն ձևով: Որպես ասվածի վառ օրինակ դիտարկենք հետևյալ խնդիրը, որն առաջադրվել է 1986թ-ի դպրոցականների մաթեմատիկայի միջազգային օլիմպիադայում:

Խնդիր 2.7: Կանոնավոր հնգանկյան յուրաքանչյուր գագաթում գրված է ինչ որ ամբողջ թիվ այնպես, որ նրանցից գոնե մեկը բացասական է, սակայն բոլորի գումարը դրական է: Թույլատրվում է կատարել հետևյալ փոփոխությունը. եթե որևէ երեք հարևան գագաթներում գրված են համապատասխանաբար $x; y$ և z թվերը, ընդ որում $y < 0$, ապա այդ թվերը կարելի է փոխարինել համապատասխանաբար $x + y; -y$ և $z + y$ թվերով, ընդ որում փոփոխությունը կատարվում է այնքան ժամանակ, քանի դեռ հնգանկյան որևէ գագաթում առկա է բացասական ամբողջ թիվ: Պարզել, այս պրոցեսը վերջավոր քայլերից հետո կարո՞ղ է ավարտվել, թե այն հնարավոր է անվերջ շարունակել:

Լուծում: Դիցուք սկզբում հնգանկյան գագաթներում հաջորդական ձևով գրված են համապատասխանաբար $x; y; z; t$ և u ամբողջ թվերը, ընդ որում $y < 0$: Համաձայն խնդրի

պայմանի ամբողջ թվերի $x; y; z; t; u$ հնգյակը պետք է փոխարինենք $x + y; -y; z + y; t; u$ հնգյակով: Նկատենք, որ խնդրում ունենք առկա ինվարիանտ, այն է հնգանկյան գազաթներում գրված թվերի գումարը. իրոք, $(x + y) + (-y) + (z + y) + t + u = x + y + z + t + u = const > 0$:

Ներմուծենք հնգանկյան գազաթներում եղած թվերով որոշվող հետևյալ փոփոխականը՝ $F = (x - z)^2 + (z - u)^2 + (u - y)^2 + (y - t)^2 + (t - x)^2$: Ապացուցենք, որ յուրաքանչյուր ընթացիկ քայլում $x; y; z; t; u$ հնգյակը $x + y; -y; z + y; t; u$ հնգյակով փոխարինելիս, ստանում ենք նոր $F' = (x - z)^2 + (z + y - u)^2 + (u + y)^2 + (y + t)^2 + (t - x - y)^2$ փոփոխական այնպիսին, որ $0 \leq F' < F$: Իրոք, հեշտ է նկատել, որ $F' - F = 2y(x + y + z + t + u) < 0$: Այսպիսով, ունենք F փոփոխական, որը հնգյակների փոփոխման ժամանակ միշտ ընդունում է դրական ամբողջ արժեքներ և պրոցեսի ողջ ընթացքում մոնոտոն նվազում է, հետևաբար կարող ենք եզրակացնել, որ վերը նկարագրված պրոցեսը վերջավոր քայլերից հետո, բնականաբար, կավարտվի:

Պատ.՝ պրոցեսը վերջավոր քայլերից հետո կավարտվի :

Ինչպես տեսնում ենք, ինվարիանտն իր օգտակար և արդյունավետ կիրառությունն ունի այնպիսի խնդիրներում, որոնցում

- **գործ ունենք առկա կամ փնտրվող ինվարիանտ կոնկրետ մեծության հետ** (ինչպես օրինակ խնդիր 2.1-ում շրջանակի երկարությունը կամ խնդիր 2.2-ում դասարանի

աշակերտների ընդհանուր քանակը),

- ինվարիանտ է մնում ոչ թե առանձին կոնկրետ մեծություն, այլ փոփոխական մեծությունների ինչ որ կոմբինացիա՝ գումար, տարբերություն, քանորդ և այլն (ինչպես օրինակ խնդիր 2.3-ում պղպջակների ծավալների գումարը, խնդիր 2.4-ում չորսուի և սեպի արագացումների մոդուլների հարաբերությունը կամ խնդիր 2.5-ում $|MA - MB|$ երկարությունների տարբերությունների մոդուլը),
- ինվարիանտ է մնում փոփոխական մեծության որևէ հատկություն՝ գույգություն, պատիկություն և այլն (ինչպես օրինակ խնդիր 2.6-ում միավոր չափսերի խորանարդիկների քանակի 3-ին բազմապատիկ լինելը),
- ինվարիանտ է մնում փոփոխական մեծության փոփոխման դինամիկան. երբ խնդրում նկարագրվող պրոցեսի ողջ ընթացքում փոփոխվող որևէ մեծություն կամ միայն աճում է, կամ միայն նվազում (ինչպես օրինակ խնդիր 2.7-ում F փոփոխականի նվազման փաստը):

§3. ՀԱՄԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԿԱՆԳՆՄԱՆ ՄԿՋԲՈՒՆՔԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՈՐՈՇ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ

Եթե ֆիզիկական կամ մաթեմատիկական խնդիրներում ի սկզբանե առկա է համաչափություն (օրինակ փոփոխականների նկատմամբ սիմետրիկ հավասարումներ կամ համակարգեր, երկրաչափական խնդիրներում կենտրոնային, առանցքային կամ հայելային համաչափության առկայություն, ֆիզիկական խնդիրներում համասեռ և համաչափ մարմինների դիտարկում, շարժվող մարմնի հետագծի համաչափություն որևէ ուղղի նկատմամբ, համաչափությամբ օժտված էլեկտրական շղթաներ և այլն), ապա շատ դեպքերում նմանատիպ խնդիրների լուծման համար այդ համաչափությունից օգտվելը անհրաժեշտություն է, և հակառակ պարագայում խնդիրը գործնականում կամ հնարավոր չէ լուծել, կամ էլ լուծման պրոցեսը բավական բարդ ու աշխատատար է: Համաչափության նկատումն ու կիրառումը ունի ոչ միայն գործնական, այլև կարևոր իմացական և գեղագիտական նշանակություն: Ֆիզիկայի և մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի տարբեր խնդրագրքերում և առաջադրանքների ժողովածուներում սակայն հանդիպում ենք բազմաթիվ խնդիրների, որոնցում ֆիզիկական կամ մաթեմատիկական օբյեկտի կամ ֆիզիկական պրոցեսի ընթացքի համաչափությունը թերի է, կամ մասամբ խախտված է: Առանց համաչափության նկատառումների այդպիսի խնդիրների լուծման ուղիղ «ավանդական» մոտեցումները բախվում են լուրջ մաթեմատիկական դժվարությունների: Նման խնդիրները լուծելու համար սովորաբար ինչ որ ձևով

անհրաժեշտ է լրացնել ու վերականգնել «կորցված» սիմետրիան:

Համոզված ենք, որ համաչափի և գեղեցիկի ընկալումը, որոնումը, վեր հանումն ու կիրառումը անգնահատելի դեր ունեն անձի մտածողության և արժեհամակարգի ձևավորման մեջ:

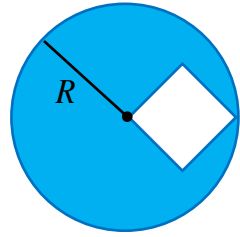
Ստորև նախ կանդրադառնանք ֆիզիկական խնդիրներում համաչափության վերականգնման առանձին տարատեսակների ներկայացմանը, որից հետո կքննարկենք նաև համաչափության հնարավոր վերականգնման տարբերակներ հանրահաշվական որոշ համակարգերի և հավասարումների համար:

Քննարկենք ի սկզբանե համաչափությամբ չօժտված ֆիզիկական տարբեր խնդիրներում համաչափության հնարավոր վերականգնման որոշ մոտեցումներ:

1. Այս մոտեցման էությունը կայանում է նրանում, որ մտովի վերականգնում են խնդրում դիտարկվող օբյեկտի խախտված համաչափությունը, և որպեսզի խնդրի պայմանները չփոխվեն մտցնում են այնպիսի լրացուցիչ օբյեկտ, որը համաչափ օբյեկտի հետ միասին լրիվ համարժեք լինի սկզբնական օբյեկտին: Նման փոխարինումից հետո, օգտվելով վերադրման սկզբունքից, խնդիրը հեշտությամբ լուծվում է, եթե համաչափ և լրացուցիչ օբյեկտի համար լուծումները հայտնի են [15]: Հարկ է նշել, որ քննարկվող խնդիրներում նշված լրացուցիչ օբյեկտը նույնպես լինում է համաչափ: Դիտարկենք մեկ խնդիր:

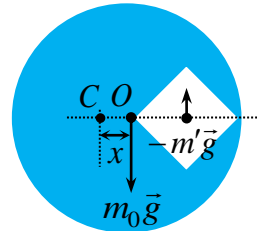
Խնդիր 3.1. *R* շառավղով համասեռ բարակ սկավառակից նկար 3.1-ում պատկերված ձևով կտրված է քառակուսի: Որոշել նման կտրվածքով սկավառակի զանգվածի կենտրոնը [46]:

Լուծում 1: Կտրվածքի բացակայության դեպքում համասեռ սկավառակը համաչափ մարմին է և նրա զանգվածի կենտրոնը գտնվում է O երկրաչափական կենտրոնում: Քառակուսաձև կտրվածքը մտովի լրացնելով մենք ստանում ենք լրիվ



Նկ. 3.1

սկավառակ՝ վերականգնելով մարմնի համաչափությունը: Սկզբնական մարմնին համարժեք մարմին ստանալու համար կտրվածքի տեղում դիտարկում ենք լրացուցիչ բացասական զանգվածով մարմին: Այսպիսով սկզբնական ոչ համաչափ մարմինը փոխարինեցինք իրեն համարժեք երկու համաչափ մարմիններով, որոնց զանգվածների կենտրոնները հայտնի են (նկ. 3.2):



Նկ. 3.2

Համաչափության նկատառումներից ակնհայտ է, որ դրանց զանգվածների C կենտրոնը գտնվում է սկավառակի և քառակուսաձև կտրվածքի կենտրոնները միացնող ուղիղ վրա: C կետի հեռավորությունը սկավառակի O կենտրոնից նշանակենք x - ու, հոծ սկավառակի զանգվածը՝ m_0 - ու, իսկ լրացուցիչ մասինը՝ m' - ու: Այժմ արդեն որոնելի x հեռավորությունը կարելի է որոշել օգտվելով մոմենտների կանոնից՝

$$m_0 g x = m' g \left(x + \frac{R}{2} \right):$$

Հաշվի առնելով, որ $m_0 = \sigma \pi R^2$ և $m' = \sigma R^2 / 2$, որտեղ σ - ն բարակ համասեռ սկավառակի միավոր մակերեսի զանգվածն է, այդ հավասարությունից գտնում ենք՝ $x = R / (4\pi - 2)$:

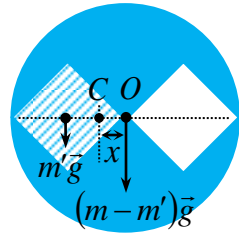
Պատ.՝ $x = R/(4\pi - 2)$:

2. Նկարագրենք նմանօրինակ խնդիրների լուծման հնարավոր երկրորդ մոտեցումը: Այս դեպքում էլ դիտարկվող ոչ համաչափ օբյեկտից մտովի հեռացվում է նրա մի մասը, որը համաչափ է դասավորված օբյեկտի համաչափությունը խախտող բացակայող մասին: Արդյունքում ստանում ենք երկու համաչափ մարմիններ, և օգտվելով վերադրման սկզբունքից լուծում ենք խնդիրը: Վերջինս հնարավոր է, եթե մի մասի հեռացման արդյունքում ստացված համաչափ մարմնի և այդ մասի լուծումները հայտնի են: Նկարագրված այս եղանակում, ի տարբերություն նախորդի, մարմինը ներկայացվում է որպես նրա մասերի համակարգ և չի ներմուծվում լրացուցիչ մարմին: Այս մոտեցման ընկալումը սովորողներից պահանջում է ավելի քիչ վերացական մտածողություն, սակայն նախորդի համեմատ այն ունի ավելի նեղ կիրառելիության սահմաններ: Բանը նրանում է, որ առաջին դեպքում «վերականգնված» մարմինն ունի ավելի բարձր համաչափության աստիճան քան մի մասի հեռացման արդյունքում ստացված մարմինը: Նշված երկու եղանակների համադրելիությունն ապահովելու համար կրկին դիտարկենք խնդիր 3.1-ը և ներկայացնենք վերջինիս լուծումն երկրորդ մոտեցմամբ:

Խնդիր 3.1. R շառավղով համասեռ բարակ սկավառակից նկար 3.1-ում պատկերված ձևով կտրված է քառակուսի: Որոշել նման կտրվածքով սկավառակի զանգվածի կենտրոնը [46]:

Լուծում /երկրորդ եղանակ/: Սկավառակից մտովի առանձնացնենք նրա O կենտրոնի նկատմամբ բացակայող մասին համաչափորեն դասավորված m' զանգվածով

քառակուսաձև կտորը (նկ. 3.3): Առանց այդ մասի՝ երկու համաչափ կտրվածքներ ունեցող սկավառակն արդեն O կենտրոնով անցնող ուղղաձիգ ուղղի նկատմամբ համաչափ է և ակնհայտ է, որ նրա զանգվածի կենտրոնը գտնվում է O կետում: Այսպիսով սկզբնական ոչ համաչափ մարմինը փոխարինեցինք իրեն համարժեք երկու համաչափ մարմիններով, որոնց զանգվածների կենտրոնները հայտնի են (նկ. 3.3): Սկզբնական մեկ կտրվածքով սկավառակի զանգվածը նշանակելով m -ով, մոմենտների կանոնից ստանում ենք՝



Նկ. 3.3

$$m'g \left(\frac{R}{2} - x \right) = (m - m')gx,$$

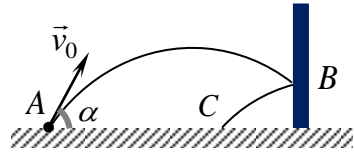
և հաշվի առնելով, որ $m = \sigma(\pi R^2 - R^2/2)$ և $m' = \sigma R^2/2$, կրկին գտնում ենք՝ $x = \frac{R}{4\pi - 2}$:

Պատ.՝ $x = \frac{R}{4\pi - 2}$:

3. Որպես համաչափության վերականգնման եղանակի երրորդ տարատեսակ կարող ենք դիտարկել բոլոր այն խնդիրները, որտեղ ֆիզիկական օբյեկտի կամ մարմնի ընդհանուր շարժման մի մասի սիմետրիկ ձևափոխության արդյունքում վերականգնվում է ամբողջի համաչափությունը, իսկ որոնելի ֆիզիկական մեծությունը դրանից չի փոխվում: Արդյունքում ի սկզբանե անհամաչափ դրվածքով խնդիրը ձեռք է բերում համաչափություն և հեշտությամբ լուծվում է: Բերենք

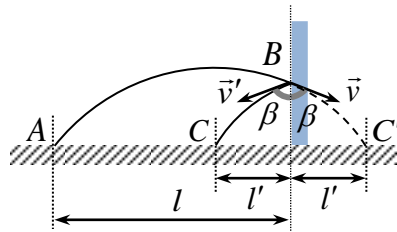
մեկ օրինակ.

Խնդիր 3.2. Մարմինը նետել են հորիզոնի նկատմամբ $\alpha = 45^\circ$ անկյան տակ $v_0 = 20$ մ/վ սկզբնական արագությամբ: Թռիչքի ժամանակ այն հարվածում է ուղղահիգ պատին, որը տեղավորված է գնդիկի շարժման հետագծի հարթությանն ուղղահայաց և նետման կետից հեռու է $l = 30$ մ-ով (նկ. 3.4): Հարվածը համարելով բացարձակ առաձգական՝ որոշել, թե պատից ի՞նչ l' հեռավորության վրա կընկնի գնդիկը [11]:



Նկ. 3.4

Լուծում: Պատին հարվածող գնդիկի ABC հետագիծը օժտված չէ համաչափությամբ: Սակայն հարվածի բացարձակ առաձգական լինելու հետևանքով հարվածից հետո և հարվածի բացակայության դեպքում շարժումները ուղղահիգ պատի նկատմամբ կունենան հայելային համաչափություն (նկ. 3.5): Իրոք, առաձգական հարվածի արդյունքում գնդիկի արագության վեկտորի մոդուլը մնում է



Նկ. 3.5

անփոփոխ ($|\vec{v}'| = |\vec{v}| = v$) և պատից անդրադառնում է նույն β անկյունով, ինչով որ հարվածել էր: Այժմ արդեն որոնելի l' - ը գտնելու համար բավական է «հեռացնել պատը» և դիտարկել անկյան տակ նետված մարմնի համաչափ շարժումը, որի

հասողության համար կունենանք՝ $l + l' = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$, որտեղից էլ

ստանում ենք $l' = 10$ մ:

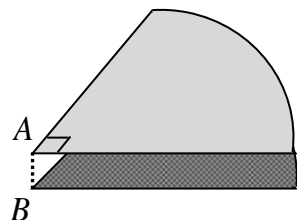
Պատ.՝ $l' = 10$ մ:

Հավելենք, որ համաչափության նկատառումներից չօգտվելու դեպքում խնդրի լուծումը դառնում է բավականին աշխատատար և անհրապույր:

4. Կան ֆիզիկական խնդիրներ որոնց լուծման համար բացակայող համաչափությունը լրացնելուց հետո ստացված համաչափ խնդրի լուծումից հեշտությամբ կարելի է ստանալ նախնական անհամաչափ խնդրի լուծումը: Քննարկենք այս հնարքի կիրառմամբ լուծվող մի խնդիր, որը դրվածքով համանման է 2009 թ-ին ֆիզիկայի հանրապետական օլիմպիադայի եզրափակիչ փուլում առաջադրված էլեկտրաստատիկայի խնդրին:

Խնդիր 3.3. Հարթ կոնդենսատորի շրջադիրները R շառավղով շրջանի քառորդ մասեր կազմող թիթեղներ են, որոնց միջև d հեռավորությունը շատ փոքր է դրանց չափսերից $d \ll R$ (նկ. 3.6):

Կոնդենսատորի լիցքը q է: Որոշել դաշտի լարվածությունը թիթեղների A և B գագաթները միացնող հատվածի միջնակետում, եթե թիթեղներն իրար զուգահեռ են, իսկ AB հատվածն ուղղահայաց է թիթեղների հարթությանը: Ընդունել, որ կոնդենսատորի թիթեղների վրա էլեկտրական լիցքերը

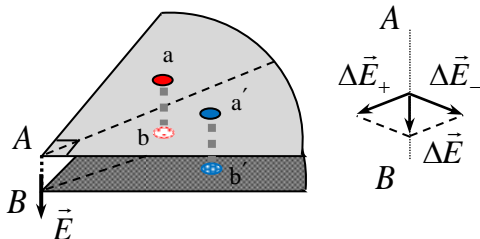


Նկ. 3.6

բաշխված են հավասարաչափ:

Լուծում: Դիտարկենք վերևի դրականապես լիցքավորված թիթեղի վրա երկու a և a' հավասարամեծ մակերեսների վրա գտնվող լիցքեր, որոնք համաչափ են դասավորված այդ շրջադիրի կիսորդի նկատմամբ: AB հատվածի միջնակետում այդ լիցքերը ստեղծում են սեկտորների կիսորդներով կազմված հարթությունում գտնվող էլեկտրական դաշտի $\Delta\vec{E}_+$ լարվածություն (նկ. 3.7): Ներքևի (բացասական լիցքով) թիթեղի՝ դրանց համապատասխան b և b' մակերեսների լիցքերի ստեղծած դաշտի $\Delta\vec{E}_-$ լարվածությունը համաչափ է վերևի թիթեղի ստեղծած դաշտի լարվածությանը AB ուղղի նկատմամբ (նկ. 3.7):

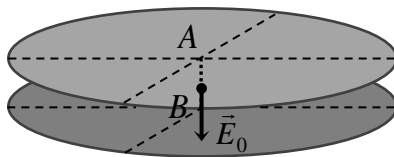
Ուստի AB հատվածի միջնակետում ինչպես այդ չորս լիցքերով ստեղծված $\Delta\vec{E}$ դաշտի



Նկ. 3.7

լարվածությունը, այնպես էլ լրիվ թիթեղների ստեղծած դաշտի \vec{E} լարվածությունը ուղղված կլինեն AB հատվածի երկայնքով:

Այժմ AB - ի նկատմամբ լիցքերի համաչափ բաշխում ստանալու նպատակով «լրացնենք» համակարգը՝ մեկը մյուսին կից տեղադրելով ևս երեք գույգ ուղղանկյուն զազաթով սեկտորաձև նույն լիցքը կրող թիթեղներ: Քանի որ լիցքավորված թիթեղների այդ



Նկ. 3.8

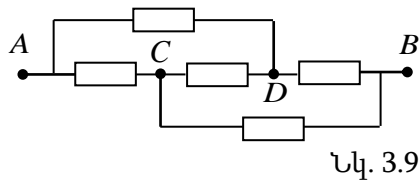
բոլոր զույգերի արդյունարար լարվածությունները համուղված են և մոդուլով հավասար, ապա շրջանաձև կոնդենսատորի ներսում լարումը կլինի $E_0 = 4E$ և նույնպես ուղղված կլինի AB - ի երկայնքով (նկ. 3.8): Օգտվելով հարթ կոնդենսատորի հայտնի բանաձևերից.

$$q = CU = \frac{\varepsilon_0 S}{d} E_0 d = \varepsilon_0 S E_0 = \pi R^2 \varepsilon_0 E_0 = 4\pi R^2 \varepsilon_0 E,$$

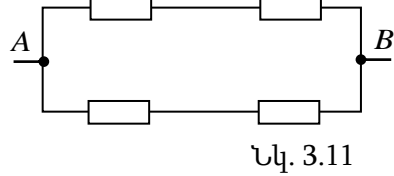
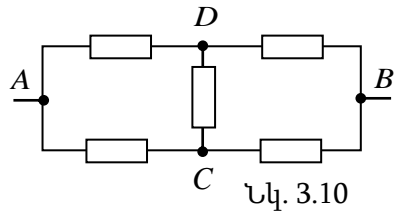
որոնելի լարվածության համար ստանում ենք՝ $E = q / (4\pi R^2 \varepsilon_0)$:

Պատ.՝ $E = q / (4\pi R^2 \varepsilon_0)$:

Խնդիր 3.4: Որքա՞ն է նկ. 3.9 - ում պատկերված AB շղթայի դիմադրությունը, եթե բոլոր ռեզիստորներն ունեն միևնույն R դիմադրությունը [6]:



Լուծում: Շղթայում ռեզիստորները միցված չեն հաջորդաբար կամ զուգահեռ կերպով և առաջին հայացքից պարզ չէ, թե ինչպես կարելի է հաշվել դիտարկվող տեղամասի դիմադրությունը: Սակայն միացումների



ձևափոխությունների արդյունքում կարելի է վերականգնել շղթայի «թաքնված» համաչափությունը: Նկար 3.10 - ից արդեն

ակնհայտ է, որ C և D կետերը ֆիզիկորեն համարժեք են և ունեն միևնույն պոտենցիալը: Վերջինից պարզ է դառնում, որ C և D կետերի միջև գտնվող ռեզիստորով հոսանք չի անցնում և նրա հեռացումը չի փոխում հոսանքների բաշխումը շղթայի տեղամասում: Այսպիսով, օգտվելով համաչափության նկատառումներից, գալիս ենք այն եզրահանգմանը, որ նկար 3.10-ում պատկերված շղթան կարելի է փոխարինել դրան համարժեք նկար 3.11-ում պատկերված առավել պարզ շղթայով: Այժմ, օգտվելով հաջորդական և զուգահեռ միացումների բանաձևերից, հեշտությամբ կարելի է հաշվել նկար 3.11-ում պատկերված շղթայի դիմադրությունը՝ $R_{AB} = R$:

Պատ.՝ $R_{AB} = R$:

Համաչափության վերականգնման մոտեցումներին վերաբերող խնդիրները անշուշտ չեն սահմանափակվում դիտարկված օրինակներով: Դրանց թվին կարելի է դասել էլեկտրաստատիկ հայելային արտապատկերումների մեթոդով կետային լիցքի և անվերջ հարթության փոխազդեցության ուժի որոշումը, երբ հարթությունն ու իր մակերևույթին մակաձված լիցքերը «փոխարինում են» համարժեք լիցքով, որը կետային լիցքի հետ համաչափ է դասավորված հարթության նկատմամբ: Արդյունքում խնդիրը փոխարինվում է լիովին համաչափ դրվածքով տարրական խնդրի և հեշտությամբ լուծվում: Նշված մոտեցմամբ լուծվող խնդրի վառ օրինակ է «Քվանտ» հանդեսի հայտնի խնդրաշարքի Փ-1762 համարը կրող գեղեցիկ խնդիրը [37]: Այն կազմվել է Գ. Գրիգորյանի կողմից և առաջադրվել է նաև ֆիզիկայի հանրապետական օլիմպիադայի եզրափակիչ

փուլում: Հեղինակային լուծման ընթացքում երկու անգամ կիրառվում է «համաչափության լրացման» հնարքը [7]: Հետաքրքիր է, որ այս խնդիրը ստանդարտ մոտեցմամբ գործնականում անհնար է լուծել:

Այժմ քննարկենք համաչափության վերականգնման հնարավորությունները հանրահաշվական որոշ համակարգերում և հավասարումներում:

Ինչպես գիտենք, օրինակ երկու x և y փոփոխականներից կազմված հավասարումը կոչվում է սիմետրիկ, եթե վերջինս մնում է անփոփոդ x -ը y -ով և y -ը x -ով փոխարինման արդյունքում [27]: Համանման ձևով, եթե համակարգի բոլոր հավասարումները սիմետրիկ են, ապա համակարգը ևս անվանում են սիմետրիկ: Մասնագիտական գրականությունում մանրամասն նկարագրված է, որ օրինակ երկու x և y փոփոխականներից կազմված սիմետրիկ համակարգերի լուծման համար նպատակահարմար է անցում կատարել նոր $\sigma_1 = x + y$ և $\sigma_2 = xy$ փոփոխականների (որոնց անվանում են նաև տարրական սիմետրիկ բազմանդամներ), ինչի արդյունքում համակարգերի լուծումը դառնում է էապես դյուրին [27]: Քննարկենք մեկ օրինակ:

Խնդիր 3.5: Գտնել $\begin{cases} x^3 + y^3 = 8 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ համակարգի իրական

լուծումները [27]:

Լուծում: Հեշտ է նկատել, որ տրված համակարգը սիմետրիկ է x և y փոփոխականների նկատմամբ, հետևաբար, ինչպես վերը

նշեցինք, անհրաժեշտ է անցում կատարել նոր $\sigma_1 = x + y$ և $\sigma_2 = xy$ փոփոխականների, ինչի արդյունքում կստանանք՝

$$\begin{cases} \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 8 \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \sigma_1^3 - 12\sigma_1 + 16 = 0 \Rightarrow (\sigma_1 - 2)^2(\sigma_1 + 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = 2 \\ \sigma_1 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_2 = 0 \\ \sigma_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 0 \\ x + y = -4 \\ xy = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0; y_1 = 2 \\ x_2 = 2; y_2 = 0 \end{cases} :$$

Պատ.՝ $x_1 = 0; y_1 = 2; x_2 = 2; y_2 = 0$:

Ինչպես տեսնում ենք, $\sigma_1 = x + y$ և $\sigma_2 = xy$ տարրական սիմետրիկ բազմանդամների ներմուծմամբ տրված համակարգը հեշտությամբ լուծվեց, մինչդեռ եթե փորձեինք այն լուծել ուղղակի փոփոխականի արտաքսման մեթոդով, ապա կհանգեինք էական դժվարությունների, քանզի ի վերջո փոփոխականներից մեկի նկատմամբ կստանայինք ոչ թե բերրոք, այլ վեցերոք աստիճանի հավասարում:

Հարկ է նշել, որ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում շատ հաճախ հանդիպում են համակարգեր, որոնք ի սկզբանե համաչափությամբ օժտված չեն, սակայն նրանցում փոփոխականների «հարմար» փոխարինման արդյունքում հնարավոր է հանգել սիմետրիկ համակարգերի, որոնք էլ հեշտությամբ կարելի է լուծել վերը նկարագրած տարրական սիմետրիկ բազմանդամների ներմուծման միջոցով: Այս համատեքստում քննարկենք ևս մեկ օրինակ:

Խնդիր 3.6: Գտնել $\begin{cases} \sqrt[4]{y^3-1} + \sqrt{x} = 3 \\ x^2 + y^3 = 82 \end{cases}$ համակարգի իրական

լուծումները [27]:

Լուծում: Նկատենք, որ տրված համակարգը սիմետրիկ չէ x և y փոփոխականների նկատմամբ: Անցնելով նոր փոփոխականների, համակարգը բերենք սիմետրիկ տեսքի: Այսպես, նշանակելով $\sqrt{x} = u$ և $\sqrt[4]{y^3-1} = v$, կունենանք՝

$\begin{cases} u + v = 3 \\ u^4 + v^4 = 81 \end{cases}$ համակարգը, որը u և v փոփոխականների

նկատմամբ սիմետրիկ է, հետևաբար նրանում անցում կատարելով նոր $\sigma_1 = u + v$ և $\sigma_2 = uv$ փոփոխականների,

կստանանք՝ $\begin{cases} \sigma_1 = 3 \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 = 81 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \sigma_1 = 3 \\ \sigma_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ uv = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 3; v_1 = 0 \\ u_2 = 0; v_2 = 3 \\ u; v \in \emptyset \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 9; y_1 = 1 \\ x_2 = 0; y_2 = \sqrt[3]{82} \end{cases} :$$

Պատ.՝ $x_1 = 9; y_1 = 1; x_2 = 0; y_2 = \sqrt[3]{82}$:

Նշենք, որ առանձին դեպքերում մեկ փոփոխական պարունակող տարբեր իռացիոնալ հավասարումների լուծումն ևս կարելի է բերել սիմետրիկ համակարգերի լուծման: Այս համատեքստում դիտարկենք մեկ իռացիոնալ հավասարում:

Խնդիր 3.7: Գտնել $\sqrt[4]{81-x} + \sqrt[4]{x} = 3$ հավասարման իրական լուծումները [27]:

Լուծում: Նշանակելով $\sqrt[4]{81-x}=u$ և $\sqrt[4]{x}=v$, կստանանք՝

$$\begin{cases} u+v=3 \\ u^4+v^4=81 \end{cases} \text{ համակարգը, որը } u \text{ և } v \text{ փոփոխականների}$$

նկատմամբ սիմետրիկ է: Ի նկատի ունենալով խնդիր 3.5-ի լուծումը, կստանանք՝

$$\begin{cases} u_1=3; v_1=0 \\ u_2=0; v_2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=81 \end{cases} :$$

Պատ.՝ $x_1=0; x_2=81$:

Հավելենք, որ սիմետրիկ բազմանդամներն իրենց օգտակար և արդյունավետ կիրառությունը կարող են ունենալ նաև տարբեր անհավասարությունների ապացուցման ժամանակ: Այսպես, եթե օրինակ ենթադրենք, որ x -ը և y -ը կամայական իրական թվեր են, ապա համաձայն Վիետի հակադարձ թեորեմի [19], $\sigma_1=x+y$ և $\sigma_2=xy$ տարրական սիմետրիկ բազմանդամների համար կարող ենք պնդել, որ իրավացի է $\sigma_1^2-4\sigma_2 \geq 0$ անհավասարությունը, որում հավասարության դեպքը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $x=y$: Օգտվելով այս ակնհայտ փաստից, հաճախ երբ անհրաժեշտ է լինում ապացուցել $f(x; y) \geq 0$ տեսքի որևէ անհավասարություն, որում $f(x; y)$ -ն x և y իրական փոփոխականներից կազմված սիմետրիկ բազմանդամ է (կամ հնարավոր է ներկայացնել միայն սիմետրիկ բազմանդամների միջոցով), ապա նպատակահարմար է x և y փոփոխականներից անցում կատարել $\sigma_1=x+y$ և $\sigma_2=xy$ սիմետրիկ բազմանդամների,

որից հետո σ_2 -ը փոխարինել նոր $z = \sigma_1^2 - 4\sigma_2$ փոփոխականով, այն է՝ $\sigma_2 = \frac{1}{4}(\sigma_1^2 - 4z)$, ի նկատի ունենալով, որ x -ի և y -ի ցանկացած իրական արժեքների դեպքում $z \geq 0$:

Որպես ասվածի հիմնավորում դիտարկենք հետևյալ անհավասարությունը:

Խնդիր 3.8: Ապացուցել, որ կամայական a և b ոչ բացասական թվերի դեպքում տեղի ունի հետևյալ

անհավասարությունը՝ $\frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$ [27]:

Լուծում: Նշանակենք $\sigma_1 = a+b \geq 0$ և $\sigma_2 = ab \geq 0$: Ունենք՝

$$\begin{aligned} \frac{a^3 + b^3}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 &= \frac{1}{2}(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) - \frac{1}{8}\sigma_1^3 = \frac{3}{8}\sigma_1^3 - \frac{3}{2}\sigma_1\sigma_2 = \\ &= \frac{3}{8}\sigma_1^3 - \frac{3}{8}\sigma_1(\sigma_1^2 - 4z) = \frac{3}{2}\sigma_1 z \geq 0 \Rightarrow \frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 : \end{aligned}$$

Անհավասարությունն ապացուցված է:

**§4. ԿՈՆՖԼԻԿՏԵՐԻ ԿԱՐԳԱՎՈՐՄԱՆ ՓՈԻԼԱՅԻՆ
ԵՂԱՆԱԿԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԵՎ
ՖԻԶԻԿԱՅԻ ՈՐՈՇ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ**

Մարդկության ծագմանը զուգահեռ ծագել և զարգացել են նաև կոնֆլիկտներն ու վեճերը: Պատերազմները տարբեր ցեղերի, տոհմերի, պետությունների, հասարակությունների և քաղաքակրթությունների միջև տեղի են ունեցել պատմական գրեթե բոլոր ժամանակահատվածներում: Համաշխարհային առաջին, երկրորդ, այնուհետև «սառը» պատերազմներն եկան ապացուցելու բռնի կոնֆլիկտների կարգավորման, կանխարգելման և դրանց դեմ գործուն միջոցների ձեռնարկման անհրաժեշտությունը:

«Կոնֆլիկտ» հասկացությունը ծագել է լատիներեն «conflictus» բառից, որը բառացիորեն նշանակում է «բախում, լուրջ տարաձայնություն, վեճ» [38]: Առօրյա կյանքում այն օգտագործվում է ինչպես տարբեր ենթատեքստերով, այնպես էլ փոխաբերական առումով: Առավել տարածված սահմանման համաձայն՝ կոնֆլիկտն այն սոցիալական իրավիճակն է, երբ երկու և ավելի կողմեր փորձում են հետամուտ լինել իրենց հակադիր շահերին և անհամատեղելի նպատակներին [49; 50]:

Կոնֆլիկտների կարգավորման և լուծման բովանդակությունն առավել ամբողջական պատկերացնելու համար անհրաժեշտ է ի նկատի ունենալ, որ ինչպես կարգավորումն, այնպես էլ կոնֆլիկտը ցանկացած մակարդակում՝ լինի դա միջանձնային կամ միջազգային բախում, հանդես է գալիս իբրև բարդ, ժամանակի մեջ ծավալվող գործընթաց, որն ունի իր սկզբնակետն ու

վերջնակետը: Կոնֆլիկտի լուծմանը հասնելու համար անհրաժեշտ է այն նախապես փորձել *կառավարել* և *կարգավորել* [40; 50]:

Կոնֆլիկտի կառավարումն ուղղված է կողմերի վարքագծի փոփոխությանը, որը հնարավորություն կտա գտնել այն ցանկալի «բանաձևը», ինչի շնորհիվ կոնֆլիկտը կընթանա երկուստեք ցանկալի հունով:

Կոնֆլիկտի կարգավորումը նպատակ ունի դադարեցնելու բռնությունը, կողմերին բերելու որոշակի համաձայնության, որը մասամբ կբավարարի նրանց շահերն ու պահանջմունքները և հնարավորություն կընձեռի ժամանակավորապես վերացնել կոնֆլիկտային վարքագծի առավել ապակառուցողական դրսևորումները:

Կոնֆլիկտի լուծումն ենթադրում է կողմերի միջև այնպիսի համաձայնություն, որը լիովին կբավարարի նրանց շահերին ու նպատակներին և այդպիսով կապահովի կոնֆլիկտի ավարտը երկարաժամկետ հեռանկարով [40; 50]:

Կոնֆլիկտների կարգավորման և լուծման համար անհրաժեշտ մեխանիզմների և ճիշտ «գործիքների» ընտրության համար անհրաժեշտ է խորամուխ լինել կոնֆլիկտի դրդապատճառների մեջ, որոնք ընդունված է բաժանել երկու տարատեսակների [40; 50].

- հիմնարար սկզբնապատճառներ կամ նպաստող պայմաններ,
- հավելյալ սկզբնապատճառներ կամ դրդիչներ:

Հիմնարար սկզբնապատճառներն, ըստ էության, ստեղծում են այն նպաստավոր պայմանները, որոնք անհրաժեշտ են կոնֆլիկտի զարգացման համար, իսկ հավելյալ

սկզբնապատճառները նպաստում են կոնֆլիկտի էսկալացիային: Հավելյալ սկզբնապատճառները կարելի է անգամ սահմանել որպես հիմնական սկզբնապատճառային իրավիճակների կտրուկ կամ անսպասելի փոփոխություն [40]:

Կոնֆլիկտների կարգավորման և լուծման ժամանակակից մեթոդներից մեկը այսպես կոչված փուլային եղանակն է [40], համաձայն որի.

- նախապես փորձ է արվում «ախտորոշել» կոնֆլիկտի հիմնական սկզբնապատճառներից գլխավորը և, եթե կոնֆլիկտն իր բնույթով և էությունը թույլ է տալիս, ապա ժամանակավորապես փորձել «սառեցնել» այդ գլխավոր սկզբնապատճառը (այն ընդունելով որպես առկա, դեռ չկարգավորված, հայտնի իրողություն),
- որից հետո, ժամանակավորապես «ձերբագատվելով» կոնֆլիկտի գլխավոր դրդապատճառից, փորձել կարգավորել և լուծել մնացյալ կոնֆլիկտը,
- նախորդ փուլերի արդյունքների հիման վրա փորձել հաղթահարել վերը նշած գլխավոր դրդապատճառը:

Կոնֆլիկտների կարգավորման փուլային եղանակի դրսևորման վառ օրինակ կարելի է համարել Ղարաբաղյան հակամարտության կարգավորման գործընթացը: Մասնավորապես, 1997թ-ին ԵԱՀԿ Մինսկի խմբի կողմից հակամարտող կողմերին առաջարկվեց հիմնահարցի լուծման «փուլային» տարբերակը [22], համաձայն որի հակամարտությունը համապարփակ ներկայացվեց չորս հիմնական`

I. Լեռնային Ղարաբաղի կարգավիճակի,

II. զինված ուժերի հետքաշման և երկուստեք վերահսկվող

տարածքների,

III. փախստականների և ներքին տեղահանված անձանց վերադարձի,

IV. հաղորդակցության ուղիների վերաբացման և շրջափակման վերացման

հիմնահարցերի տեսքով, որոնցից առանցքային (հիմնարար) համարվեց ԼՂ կարգավիճակի որոշման հարցը: Ըստ այդմ, «փուլային» եղանակի տրամաբանության համաձայն, նախապես կարգավորվում էին վերը նշած II-րդ, III-րդ և IV-րդ հիմնահարցերը (այն է՝ հավելյալ սկզբնապատճառները), և այդ ամենից հետո միայն կարգավորման փաստաթուղթն ենթադրում էր հիմնահարցի գլխավոր դրդապատճառի, այն է՝ ԼՂ կարգավիճակի վերջնական որոշում խաղաղ բանակցությունների և հանրաքվեի միջոցով:

Ելնելով վերոգրյալից, ստորև կփորձենք կոնֆլիկտների կարգավորման և լուծման վերը նշած փուլային եղանակը «տեղայնացնել» և կիրառել մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի տարբեր ոչ տիպային խնդիրների լուծման պրոցեսում:

Երբեմն հանդիպում են մաթեմատիկական և ֆիզիկական ոչ տիպային խնդիրներ, որոնցում ի սկզբանե ակնառու է խնդրի ելակետային տվյալներից բխող էական «բարդությունը»: Ընդ որում, առանց այդ «բարդության» խնդիրն, ըստ էության, դառնում է հեշտ հաղթահարելի և ինչ որ իմաստով տիպային, մինչդեռ վերջինիս առկայությունը խնդիրը դարձնում է ոչ տիպային և դժվար հաղթահարելի: Մեր կարծիքով, նմանատիպ խնդիրներում, եթե իհարկե, խնդրի դրվածքն ու առանձնահատկությունը թույլ են տալիս, կարելի է կիրառել

կոնֆլիկտների կարգավորման վերը նշած փուլային եղանակը, համաձայն որի.

- նախապես «ախտորոշում» ենք խնդրի ելակետային տվյալներից բխող այն էական «բարդությունն», որի առկայության պատճառով խնդիրը դարձել է ոչ տիպային և իր դրվածքով ստեղծել է անորոշ իրավիճակ վերլուծության համար, որից հետո,
- առաջին փուլում անտեսում կամ մեզ հարմար ձևով վերափոխում ենք խնդրի նախնական տվյալներից բխող վերը նշած էական բարդությունը, ինչի արդյունքում հանգում ենք առավել դյուրին և հեշտ հաղթահարելի նոր տիպային խնդրի, փորձում ենք լուծել այն,
- երկրորդ փուլում, արդեն լուծած լինելով նախորդ փուլում ստացված համեմատաբար պարզ նոր խնդիրը, վերադառնում ենք ելակետային բարդ խնդրին և վերջինիս լուծման ընթացքում փորձում ենք կիրառել առաջին փուլում դիտարկված պարզ խնդրի լուծման արդյունքը:

Հարկ է նշել, որ առանձին դեպքերում, երբեմն հանդիպում են խնդիրներ, որոնցում եթե հաջողվում է հարմար կամ խելամիտ ձևով վերափոխել խնդրի ելակետային տվյալներից բխող էական բարդությունը, ապա հենց առաջին փուլի «արդյունքը» բավարար է ելակետային խնդրի լուծման համար և այլևս երկրորդ փուլի անհրաժեշտություն չի առաջանում:

Որպես ասվածի հիմնավորում դիտարկենք երկու խնդիր:

Խնդիր 4.1: Յուրաքանչյուր $n \geq 3$ բնական թվի համար հաշվել հետևյալ գումարը՝

$$S_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \dots + \frac{1}{n}}}}} + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \dots + \frac{1}{n}}}} \quad [29]:$$

Լուծում: Նկատենք, որ խնդրի բարդությունն ու անորոշությունը կայանում է նրանում, որ գումարելիների քանակն անորոշ է և ուղղակի գումարման եղանակը կիրառելի չէ: Առաջին փուլում, անմիջական նշանակման միջոցով, փորձենք վերափոխել այդ առկա բարդությունը: Այսպես,

նշանակելով $1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \dots + \frac{1}{n}}} = r_n$, կունենանք՝

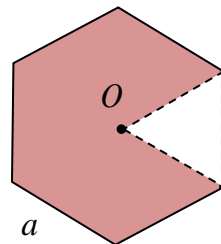
$$+ \frac{1}{n}$$

$$S_n = \frac{1}{1 + 1/r_n} + \frac{1}{1 + r_n} = \frac{r_n}{1 + r_n} + \frac{1}{1 + r_n} = 1:$$

Պատ.՝ $S_n = 1$:

Խնդիր 4.2 a կողմով կանոնավոր վեցանկյան տեսք ունեցող համասեռ բարակ թիթեղից նկար 4.1-ում պատկերված ձևով կտրված է եռանկյուն:

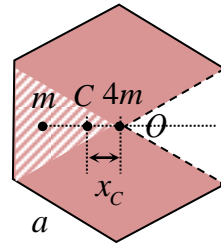
Որոշել նման կտրվածքով մարմնի զանգվածի կենտրոնի հեռավորությունը O կետից [46]:



Նկ. 4.1

Լուծում: Նկատենք, որ ի սկզբանե խնդրի բարդությունն ու

անորոշությունը կայանում է քննարկվող մարմնի անհամաչափության մեջ: Ուստի, վերափոխելով այս առկա բարդությունը, առաջին փուլում մարմնից մտովի կառանձնացնենք նրա O կենտրոնի նկատմամբ բացակայող մասին համաչափորեն դասավորված m զանգվածով եռանկյունաձև կտորը (նկ. 4.2): Առանց այդ մասի՝ երկու համաչափ կտրվածքներ ունեցող $4m$ զանգվածով մարմինն արդեն O կենտրոնի նկատմամբ համաչափ է և ակնհայտ է, որ նրա զանգվածի կենտրոնը գտնվում է O կետում: Այսպիսով սկզբնական ոչ համաչափ մարմինը փոխարինեցինք իրեն համարժեք երկու համաչափ մարմինների համակարգով, որոնց զանգվածների կենտրոնները հայտնի են (նկ. 4.2): Այժմ, օգտվելով զանգվածների կենտրոնի բանաձևից, որոնելի մեծության համար ստանում ենք՝



Նկ. 4.2

$$x_c = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{m \frac{a}{\sqrt{3}}}{m + 4m} = \frac{\sqrt{3}a}{15} :$$

Պատ՝ $x_c = \sqrt{3}a/15$:

Այժմ դիտարկենք մաթեմատիկական և ֆիզիկական մի քանի ոչ տիպային խնդիրներ, որոնք կլուծենք առաջարկվող փուլային եղանակի կիրառմամբ՝ վերը նշած երկու փուլերի միջոցով:

Խնդիր 4.3: Հաշվել գումարը՝ $S_n = 7 + 77 + 777 + 7777 + \dots + \underbrace{77 \dots 7}_{n \text{ հաս}}$ [25]:

Լուծում: Նկատենք, որ խնդրի բարդությունն ու անորոշությունը կայանում է նրանում, որ S_n գումարի գումարելիները թվաբանական կամ երկրաչափական պրոգրեսիաների հաջորդական անդամներ չեն: Ուստի, համաձայն վերոգրյալի, վերափոխելով այս առկա բարդությունը, առաջին փուլում կդիտարկենք որոնելի գումարին համանման այնպիսի գումար, որի անդամները հանդիսանում են երկրաչափական պրոգրեսիայի հաջորդական անդամներ: Հաշվելով այդ գումարը, հաջորդ փուլում, վերջինիս արդյունքն ի նկատի ունենալով, կփորձենք հաշվել որոնելի գումարը:

Փուլ 1: Դիտարկենք հետևյալ գումարը՝ $T_n = 10^1 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n$: Ի նկատի ունենալով, որ այս գումարի անդամները $b_1 = q = 10$ երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին n հաջորդական անդամներն են, վերջինիս համար կունենանք՝ $T_n = \frac{10^{n+1} - 10}{9}$:

Փուլ 2: Այժմ փորձենք հաշվել որոնելի S_n գումարը, ի նկատի ունենալով նախորդ փուլում դիտարկված գումարի արդյունքը: Այսպես, ունենք՝

$$T_n = 10 + 100 + 1000 + \dots + \underbrace{100 \dots 0}_n = (9+1) + (99+1) +$$

$$+ (999+1) + \dots + \left(\underbrace{99 \dots 9}_n + 1 \right) = 9 \left(1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{11 \dots 1}_n \right) +$$

$$+ n = \frac{9}{7} \cdot S_n + n, \text{ որտեղից որոնելի } S_n \text{ գումարի համար}$$

կատանանք՝ $S_n = \frac{7}{9} \cdot \left(\frac{10^{n+1} - 10}{9} - n \right)$:

Պատ.՝ $S_n = \frac{7}{9} \cdot \left(\frac{10^{n+1} - 10}{9} - n \right)$:

Խնդիր 4.4: Ունենք երկու տարաներ, որոնց մեջ հավասար քանակությամբ լցված է, համապատասխանաբար, կաթ և սուրճ: Նախ սուրճով լցված տարայից մեկ բաժակ սուրճ ավելացնում ենք կաթով լցված տարայի մեջ, ապա ստացված խառնուրդից դարձյալ մեկ բաժակի չափով ավելացնում ենք սուրճով լցված տարայի մեջ: Պարզել, վերջնարդյունքում ի՞նչն է ավելի շատ՝ սուրճով լցված տարայի մեջ կաթի պարունակությունը, թե՞ կաթով լցված տարայի մեջ սուրճի պարունակությունը [51]:

Լուծում: Նկատենք, որ ի սկզբանե խնդրի բարդությունն ու անորոշությունը կայանում է նրանում, որ հայտնի չեն ոչ տարայի և ոչ էլ բաժակի տարողունակությունները կամ նրանց հարաբերությունը և, ելնելով դրանից, դժվար է ի սկզբանե հստակ ենթադրություն անել քննարկվող քանակների վերաբերյալ: Ըստ էության, ներմուծելով երկու փոփոխական (տարայի և բաժակի ծավալների համար) և կազմելով համապատասխան հավասարումներ, առանց որևէ տրամաբանական եզրահանգումների, զուտ ֆորմալ առումով, որոշակի ձևափոխություններից հետո կարելի է պարզել, թե որ պարունակությունն է ավելի շատ, սակայն, ելնելով վերոգրյալից, ստորև կվարվենք այլ կերպ՝ փորձելով կիրառել առաջարկվող փուլային եղանակը:

Փուլ 1: Քանի որ խնդրի ելակետային տվյալներից պարզ չէ

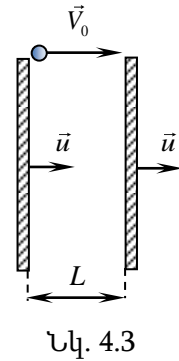
տարայի և բաժակի ծավալների հարաբերությունը, ապա փորձենք խուսափել այդ անորոշությունից և այս փուլում, վերափոխելով ելակետային խնդիրը, դիտարկենք առավել պարզ խնդիր, այն է՝ ենթադրենք բաժակի ծավալն համընկնում է տարայի ծավալի հետ: Ակնհայտ է, որ այս դեպքում երկու տարաներում էլ, ի վերջո, կունենանք սուրճի և կաթի հավասար քանակությամբ խառնուրդներ:

Փուլ 2: Ի նկատի ունենալով նախորդ փուլի արդյունքը, ինդուկտիվ եզրահանգման շնորհիվ, տրամաբանական դատողությունների միջոցով փորձենք հիմնավորել, որ անկախ բաժակի և տարայի ծավալների հարաբերակցությունից, վերջնարդյունքում միշտ կունենանք սուրճի և կաթի հավասար քանակությամբ խառնուրդներ: Իրոք, նկատենք, որ եթե սկզբում ունեինք նույն քանակությամբ զուտ սուրճ և զուտ կաթ, ապա վերախառնումներից հետո ունենք դարձյալ նույն քանակությամբ սուրճի և կաթի խառնուրդներ: Հեշտ է նկատել, որ նույնպիսի վերջնարդյունքի կարելի է հասնել, եթե նախապես ոչ թե մեկ, այլ երկու բաժակներով որոշակի քանակությամբ (թեկուզ և տարբեր ծավալներով) սուրճ և կաթ վերցնեինք զուտ սուրճի և զուտ կաթի ելակետային տարաներից և վերցվածը դատարկեինք մյուս տարայում, բայց քանի որ վերջնարդյունքում տարաներում պետք է ունենանք նույն ծավալի խառնուրդներ, կնշանակի, երկու բաժակներով էլ պետք է վերցնենք միևնույն քանակի սուրճ և կաթ, և ուրեմն, անկախ բաժակի և տարայի ծավալների հարաբերակցությունից, վերջնարդյունքում միշտ կունենանք սուրճի և կաթի հավասար պարունակություններ: Ինդուկտիվ եզրահանգումն

ապացուցված է:

Պատ.՝ վերջնարդյունքում կունենանք սուրճի և կաթի հավասար պարունակություններ:

Խնդիր 4.5: V_0 հորիզոնական արագությամբ շարժվող փոքրիկ գնդիկը ներս է թռչում u հորիզոնական արագությամբ շարժվող երկու ուղղաձիգ պատերի միջև: Որքա՞ն է գնդիկի արագությունը առջևի պատին n -րդ հարվածից հետո: Պատերի միջև հեռավորությունը L է (տես նկ. 4.3): Հարվածները բացարձակ առաձգական են [21]:



Լուծում: Ակնառու դժվարությունը, որին հանդիպում ենք խնդրի վերլուծման ընթացքում, պայմանավորված է պատերի շարժվելու հանգամանքով: Ակնհայտ է, որ խնդիրը շատ ավելի պարզ կլիներ, եթե ուղղաձիգ պատերը լինեին անշարժ: Ուստի, համաձայն վերոգրյալի, անտեսելով այս առկա բարդությունը, առաջին փուլում կդիտարկենք առավել պարզ խնդիր, երբ ուղղաձիգ պատերն անշարժ են:

Փուլ 1: Քննարկենք հետևյալ խնդիրը. հորիզոնական V_0' արագությամբ շարժվող փոքրիկ գնդիկը ներս է թռչում L հեռավորությամբ երկու ուղղաձիգ անշարժ առաձգական պատերի միջև: Որոշել գնդիկի արագությունը առջևի պատին n - րդ հարվածից հետո:

Քանի որ պատերի հետ հարվածները բացարձակ առաձգական են, ուրեմն յուրաքանչյուր բախման արդյունքում գնդիկի արագության հորիզոնական բաղադրիչը կփոխի իր

ուղղությունը, մոդուլով մնալով նույնը՝ $V'_{\parallel} = V'_0$: Եվ ուրեմն, պատից-պատ շարժման տևողությունը կլինի՝ $t_0 = L/V'_0$: Շարժման սկզբից մինչև առջևի անշարժ պատի հետ n - րդ հարվածի պահը գնդիկը հետևի անշարժ պատին բախված կլինի $n-1$ անգամ, հետևաբար նրա շարժման ժամանակը կլինի՝ $t = (2(n-1)+1)t_0 = (2n-1)t_0$: Ժամանակի այդ նույն t պահին գնդիկի արագության ուղղաձիգ բաղադրիչը, որը սկզբում զրո էր, կլինի՝ $V'_{\perp} = gt$: Հետևաբար, առջևի անշարժ պատին n -րդ հարվածից հետո գնդիկի արագության մոդուլի համար կստանանք՝ $V' = \sqrt{V'^2_{\parallel} + V'^2_{\perp}}$:

Փոյլ 2: Այժմ վերադառնանք ելակետային խնդրին: Շարժվող պատերի առկայության դեպքում նախ գնդիկի շարժումն ուսումնասիրենք պատերի հետ կապված շարժվող իներցիալ համակարգում: Այս դեպքում մենք կունենանք անշարժ պատեր և, համաձայն նախորդ փուլում դիտարկված խնդրի, նրանց միջև $V'_0 = V_0 - u$ արագությամբ ներս թռչող գնդիկ:

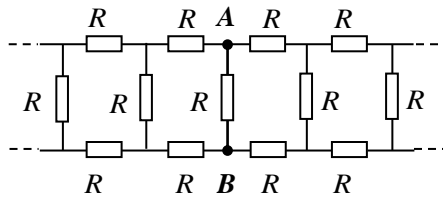
Այժմ, երբ այս խնդիրը լուծված է պատերի հետ կապված շարժվող հաշվարկման համակարգում, անցում կատարենք Երկրի հետ կապված անշարժ համակարգին: Քանի որ պատերը շարժվում են հորիզոնական ուղղությամբ, պարզ է, որ գնդիկի արագության ուղղաձիգ բաղադրիչը ն՛ պատերի, ն՛ Երկրի նկատմամբ կլինի նույնը՝ $V'_{\perp} = V'_{\perp}$: n -րդ հարվածից հետո գնդիկի արագության հորիզոնական բաղադրիչը պատի նկատմամբ $V'_{\parallel} = V_0 - u$ է, իսկ անշարժ համակարգի նկատմամբ V'_{\parallel} -ից տարբերվում է u չափով (քանի որ պատը հեռանում է գնդիկից),

այսինքն՝ $V_{II} = V'_{II} - u = V_0 - 2u$:

Արդյունքում, անշարժ համակարգում առջևի պատին n -րդ հարվածից հետո գնդիկի արագության մոդուլի համար կատանանք. $V = \sqrt{V_{II}^2 + V_{\perp}^2} = \sqrt{(V_0 - 2u)^2 + (g(2n-1)L/(V_0 - u))^2}$:

Պատ.՝ $V = \sqrt{(V_0 - 2u)^2 + (g(2n-1)L/(V_0 - u))^2}$:

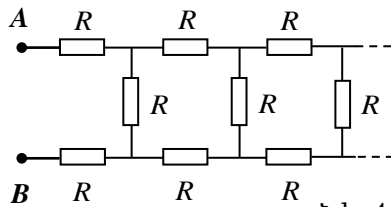
Խնդիր 4.6: Գտնել նկ. 4.4-ում պատկերված շղթայի դիմադրությունը A և B կետերի միջև: Շղթան երկու ուղղություններով անվերջ է և յուրաքանչյուր հաղորդչի դիմադրությունը R է [21]:



Նկ. 4.4

Լուծում: Հեշտ է նկատել, որ խնդրի ակնհայտ դժվարությունն ու բարդությունը պայմանավորված է շղթայի երկկողմանի անվերջ լինելով: Այդ իսկ պատճառով, այս խնդրում ևս փորձենք կիրառել վերը նկարագրած փուլային եղանակը:

Փուլ 1: «Անտեսենք» երկկողմանի անվերջությամբ պայմանավորված խնդրի ակնառու բարդությունը և հաշվենք դիտարկվող շղթայի մի մասը կազմող կիսաանվերջ շղթայի r դիմադրությունը A և B



Նկ. 4.5

կետերի միջև (տես նկ. 4.5): Քանի որ այս շղթան կազմված է անվերջ քանակությամբ կրկնվող միատեսակ օղակներից, հեշտ

է նկատել, որ եթե շղթայից առաջին օղակը հեռացնենք (կամ ավելացնենք նմանատիպ օղակ), ապա մնացած մասի դիմադրությունը չի փոխվի: Այս հնարքի կիրառմամբ, օգտվելով հաղորդիչների զուգահեռ և հաջորդական միացման ժամանակ շղթայի դիմադրության հաշվման հայտնի բանաձևերից [18], նկ. 4.5-ում պատկերված շղթայի դիմադրության համար կստանանք՝ $r = (1 + \sqrt{3})R$:

Փուլ 2: Նկատենք, որ նկ. 4.4-ում պատկերված շղթան A և B կետերի նկատմամբ օժտված է համաչափությամբ, հետևաբար, կարող ենք համապոտենցիալ կետերը միացնել միմյանց: Բոլոր այդպիսի կետերի ուղղակի միացման դեպքում, ի նկատի ունենալով նախորդ փուլի արդյունքը, ելակետային անվերջ շղթայի որոնելի դիմադրության համար կստանանք՝ $R_{AB} = \sqrt{3}R/3$:

Պատ.՝ $R_{AB} = \sqrt{3}R/3$:

Ինչպես տեսնում ենք, առաջարկվող փուլային եղանակը կարող է իր արդյունավետ կիրառությունն ունենալ ինչպես կոնֆլիկտների կարգավորման և լուծման պրոցեսում, այնպես էլ մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի առանձին խնդիրներում, երբ խնդրի ելակետային դրվածքում առկա է կոնկրետ «գործոն», որը ոչ միայն տվյալ խնդիրը դարձնում է ոչ տիպային և բարդ հաղթահարելի, այլ նաև, ինչ որ իմաստով, լուծողի համար ստեղծում է անորոշ իրավիճակ, երբ հայտնի մոտեցումներն այլևս կիրառելի չեն:

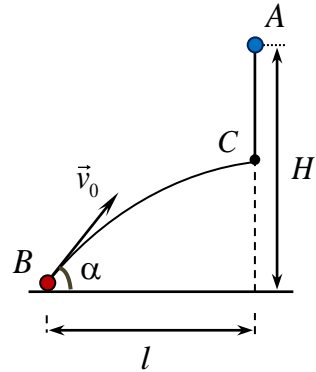
§5. ՀԱՇՎԱՐԿՄԱՆ ՀԱՐՄԱՐ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԸՆՏՐՈՒԹՅԱՆ ԿԱՐԵՎՈՐՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

«Հաշվարկման համակարգ» բառակապակցությունն իր կիրառությունն ունի թե ֆիզիկայի և թե մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում, յուրաքանչյուր բնագավառում ունենալով իր ուրույն նշանակությունը: Հարմար հաշվարկման համակարգի ընտրությունը կարող է կարևոր և էական հանգամանք հանդիսանալ ֆիզիկայի և մաթեմատիկայի տարբեր ոչ տիպային խնդիրների լուծման ժամանակ: Ստորև նախ կմեկնաբանենք «հաշվարկման համակարգ» բառակապակցության էությունը ֆիզիկայում և մաթեմատիկայում, որից հետո կդիտարկենք ֆիզիկայի և մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի տարբեր ոչ տիպային խնդիրներ, որոնց լուծման համար կառաջարկենք մոտեցումներ՝ ի ցույց դնելով հարմար հաշվարկման համակարգի ընտրության օգտակարությունն ու անմիջական կիրառությունը:

Ինչպես հայտնի է ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացից, մեխանիկական շարժումը դիտարկվում է հաշվարկման ինչ որ համակարգում, ընդ որում միևնույն շարժումը տարբեր հաշվարկման համակարգերում կարող է տեղի ունենալ տարբեր ձևերով, ասել է թե՛ մեխանիկական շարժումը հարաբերական է [17]: Այս է պատճառը, որ հաշվարկման համակարգի ընտրությունը հանդիսանում է էական բաղադրիչ մարմինների մեխանիկական շարժմանը վերաբերող որոշ խնդիրների լուծման գործընթացում: Ստորև կդիտարկենք

կինեմատիկական, ինչպես նաև մեխանիկական փակ համակարգերի վերաբերյալ մի քանի ոչ տիպային խնդիրներ, որոնց լուծման ընթացքում վեր կհանենք հարմար հաշվարկման համակարգի ընտրության ակնառու օգտակարությունը, իսկ առանձին դեպքերում նաև անխուսափելի կիրառությունը, երբ ցանկալի կամ անհրաժեշտ է սովորաբար Երկրի հետ կապված հաշվարկման համակարգը փոխարինել այլ հաշվարկման համակարգով:

Խնդիր 5.1: Մարմինն առանց սկզբնական արագության ազատ անկում է կատարում A կետից: Միաժամանակ B կետից հորիզոնի նկատմամբ α անկյան տակ նետում են մյուս մարմինը այնպես, որ դրանք բախվում են (նկ. 5.1): Ցույց տալ, որ α անկյան մեծությունը կախված չէ մարմնի



Նկ. 5.1

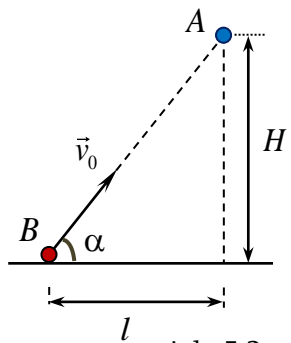
v_0 սկզբնական արագությունից: Որոշել այդ անկյունը, եթե $H = \sqrt{3}l$ [30]:

Լուծում: Խնդրի ավանդական լուծումը, երբ գնդիկների շարժումները դիտարկվում են Երկրի հետ կապված հաշվարկման համակարգում, բավականին երկար է և ոչ էֆեկտիվ: Այս և նմանատիպ խնդիրները, երբ մարմինները շարժվում են միայն նրանց վրա ազդող Երկրի ձգողության ուժերի ազդեցությունների ներքո, շատ հարմար է լուծել մարմիններից մեկի հետ կապված հաշվարկման

համակարգում: Բանը նրանում է, որ ազատ անկում կատարող մարմիններից ցանկացածը մյուսի հետ կապված հաշվարկման համակարգում կատարում է ուղղագիծ հավասարաչափ շարժում: Վերջինս պայմանավորված է ազատ անկման առանձնահատկությամբ, այսինքն այն հանգամանքով, որ ազատ անկում կատարող բոլոր մարմինները, անկախ իրենց զանգվածներից, տվյալ տեղանքում շարժվում են միևնույն \vec{g} արագացմամբ: Քննարկվող խնդրում, եթե հաշվարկման համակարգը կապենք A կետից բաց թողնված մարմնի հետ, ապա B կետից նետված մարմինը A -ի նկատմամբ կշարժվի ուղղագիծ և հավասարաչափ՝

$$\vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{v}_0 + \vec{g}t - \vec{g}t = \vec{v}_0$$

հարաբերական արագությամբ: Համաձայն խնդրի պայմանի մարմինները բախվում են: Քանի որ A մարմնի հետ կապված համակարգում A -ն դադարի վիճակում է, իսկ B -ն շարժվում է



Նկ. 5.2

ուղիղ գծով՝ \vec{v}_0 արագությամբ, ապա բախում կդիտվի, եթե B -ի շարժման գիծը անցնի A կետով (նկ. 5.2): Նկար 5.2 - ից պարզ է, որ

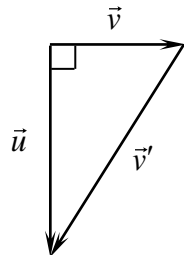
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{l},$$

և, իրոք, α անկյունը կախված չէ v_0 -ից: Եթե $H/l = \sqrt{3}$, ապա $\alpha = 60^\circ$:

Պատ.՝ 60° :

Խնդիր 5.2: Ունենք v արագությամբ շարժվող միատեսակ միջուկների փունջ: Փնջում միջուկները ինքնակամ տրոհվում են երկու միանման բեկորների: Փնջի ուղղությամբ շարժվող բեկորների արագությունը $3v$ է: Գտեք փնջի ուղղությանն ուղղահայաց շարժվող բեկորների արագությունը [21]:

Լուծում: Տրոհման պրոցեսը պարզորոշ պատկերացնելու և խնդրի պայմաններում տրված ինֆորմացիան արդյունավետ օգտագործելու համար հարմար է անցնել միջուկների զանգվածների կենտրոնների հետ կապված C ինտրցիալ հաշվարկման համակարգի: Վերջինս Երկրի նկատմամբ v արագությամբ շարժվող համակարգ է: Քանի որ, համաձայն խնդրի պայմանի, փնջի ուղղությամբ շարժվող բեկորների արագությունը $3v$ է, ապա զանգվածների կենտրոնի հետ կապված համակարգում դրանց արագությունը կլինի $2v$: C համակարգում բոլոր միջուկները սկզբում գտնվում են դադարի վիճակում, իսկ պայթյունից հետո միատեսակ լինելու պատճառով բոլոր բեկորներն էլ ձեռք են բերում միևնույն $v' = 2v$ արագությունը: Այժմ քննարկենք Երկրի նկատմամբ շարժվող բեկորների շարժումը: Արագությունների գումարման կանոնի համաձայն $\vec{u} = \vec{v} + \vec{v}'$, որտեղ \vec{u} -ն բեկորի արագությունն է Երկրի նկատմամբ, \vec{v}' -ը՝ նույն բեկորի արագությունն է C համակարգում:



Նկ. 5.3

Նկար 5.3 - ից պարզ է, որ

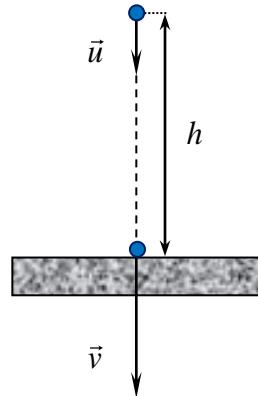
$$u = \sqrt{v'^2 - v^2} = \sqrt{3}v:$$

Պատ.՝ $\sqrt{3}v$:

Հարկ է նշել, որ զանգվածների կենտրոնի հետ կապված հաշվարկման համակարգի կիրառումը արդյունավետ է ինչպես առանձին խնդիրների, այնպես էլ ընդհանուր բնույթի տեսական հարցերի քննարկման ժամանակ: Դա մասամբ պայմանավորված է այն հանգամանքով, որ փակ համակարգի դեպքում զանգվածների կենտրոնի հետ կապված հաշվարկման համակարգը նույնպես իներցիալ է և նրանում սովորական ձևով գործում են Նյուտոնի օրենքները:

Խնդիր 5.3: Մարմինը բաց են թողնում սալաքարից h բարձրության վրա: Սալաքարը շարժվում է ուղղաձիգ վեր u արագությամբ: Որոշեք սալաքարին մարմնի երկու հաջորդական հարվածների միջև ժամանակը: Հարվածները բացարձակ առաձգական են [21]:

Լուծում: Խնդիրը հեշտ կլինի լուծել, եթե մարմնի շարժումը դիտարկենք Երկրի նկատմամբ u արագությամբ հավասարաչափ շարժում կատարող սալաքարի հետ կապված իներցիալ հաշվարկման համակարգում: Այդ դեպքում մենք կունենանք անշարժ սալաքարի վրա h բարձրությունից u սկզբնական արագությամբ ուղղաձիգ ներքև նետված մարմին (նկ. 5.4): Քանի որ,



Նկ. 5.4

համաձայն խնդրի պայմանի, հարվածները բացարձակ առաձգական են, ապա յուրաքանչյուր անգամ ինչ

արագությամբ որ մարմինը բախվում է սալաքարին, մոդուլով նույն արագությամբ էլ անդրադառնում է նրանից: Արդյունքում սալաքարի նկատմամբ գնդիկը կատարում է չմարող տատանումներ՝ ամեն անգամ հասնելով միննույն առավելագույն բարձրության և ցանկացած երկու բախումների միջև եղած ժամանակը նույնն է: Նախ, օգտվելով էներգիայի պահպանման օրենքից, կարելի է որոշել մարմնի արագությունը սալաքարի հետ հարվածի պահին՝

$$v = \sqrt{u^2 + 2gh} :$$

Այնուհետ, հաշվի առնելով, որ այդ նույն արագությամբ էլ մարմինն անդրադառնում է սալաքարից մարմնի շարժման վերելքի և վայրէջքի գումարային ժամանակի համար ստանում ենք.

$$\tau = \frac{2v}{g} = \frac{2\sqrt{u^2 + 2gh}}{g} :$$

Վերջինս էլ հենց հարվածները բաժանող որոնելի ժամանակամիջոցն է:

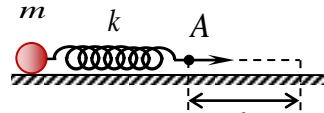
Պատ. $\frac{2\sqrt{u^2 + 2gh}}{g} :$

Հարկ է նշել, որ նմանատիպ խնդիրներում, երբ գործ ունենք շարժվող պատի հետ մարմինների բախման հետ, միշտ հարմար է օգտվել պատի հետ կապված հաշվարկման համակարգից: Նման խնդիրները կարևոր են, քանի որ դրանց միջոցով հնարավոր է դառնում որակապես, իսկ երբեմն էլ քանակապես նկարագրել մուլեկուլային ֆիզիկայի և ջերմադինամիկայի որոշ կարևոր օրինաչափություններ:

Օրինակ, բացատրվում է շարժական միացով փակված գազի վրա սեղմման կամ ընդարձակման ժամանակ միացի կատարած աշխատանքի և մոլեկուլների միջին կինետիկ էներգիաների, կամ գազի ներքին էներգիայի կապի կարևոր հարցերը:

Խնդիր 5.4: Նախապես չդեֆորմացված և անշարժ, k կոշտությամբ զսպանակի մի ծայրից ամրացված է m զանգվածով գնդիկ: Չսպանակի ազատ A ծայրը սկսում են զսպանակի երկայնքով հաստատուն արագությամբ քաշել սկզբնական դիրքից d

հեռավորությամբ և ապա կտրուկ կանգնեցնում են (նկ. 5.5):



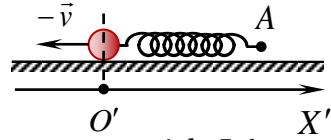
Նկ. 5.5

Չսպանակի այդ ծայրի ի՞նչ v արագության դեպքում այն

կանգնելուց հետո գնդիկը չի տատանվի: Շփման և դիմադրության ուժերն անտեսել [21]:

Լուծում: Պարզ է, որ Երկրի հետ կապված հաշվարկման համակարգում դժվար է ուսումնասիրել գնդիկի շարժումը: Սակայն եթե անցնենք այնպիսի հաշվարկման համակարգի, որի նկատմամբ զսպանակի A ծայրը դադարի վիճակում է, ապա զսպանակից ամրացված գնդիկի շարժումը կունենա շատ պարզ նկարագիր: Նշված համակարգը ինտրցիալ է, քանի որ Երկրի նկատմամբ շարժվում է \vec{v} հաստատուն արագությամբ: Շարժվող համակարգում զսպանակի A ծայրակետը միշտ դադարի վիճակում է իսկ սկզբնական պահին զսպանակը դեֆորմացված չէ և գնդիկի արագությունը $-\vec{v}$ է: Շարժվող համակարգում կոորդինատային $O'X'$ առանցքը ուղղորդենք

զսպանակի երկայնքով դեպի աջ՝ որպես O' սկզբնակետ ընտրելով գնդիկի սկզբնական դիրքը (նկ. 5.6): Պարզ է, որ այս համակարգում գնդիկը կկատարի ներդաշնակ տատանումներ O' կետի շուրջ: Գնդիկի արագության



Նկ. 5.6

լայնությային արժեքը կլինի v : Քանի որ ժամանակի սկզբնապահին գնդիկը հավասարակշռության դիրքում է, իսկ նրա արագությունը հակադրված է $O'X'$ առանցքին, ապա գնդիկի արագության պրոյեկցիան շարժվող համակարգում ժամանակի ընթացքում կփոխվի հետևյալ ներդաշնակության օրենքով՝

$$v'_x = -v \cos \omega t,$$

որտեղ $\omega = \sqrt{k/m}$ - ը գնդիկի տատանումների շրջանային հաճախությունն է: Այժմ անցում կատարենք Երկրի հետ կապված հաշվարկման համակարգի և կոորդինատային OX առանցքն ուղղորդենք դեպի աջ: Օգտվելով արագությունների գումարման կանոնից Երկրի հետ կապված հաշվարկման համակարգում գնդիկի արագության պրոյեկցիայի համար ստանում ենք՝

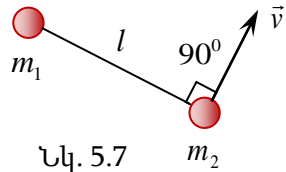
$$v_x = v + v'_x = v(1 - \cos \omega t):$$

Մինչև կանգնելը զսպանակի A ծայրակետի շարժման տևողությունը $\tau = d/v$ է: Ակնհայտ է, որ A կետի կանգնելուց հետո գնդիկը տատանումներ չի կատարի, եթե ժամանակի τ պահին նրա արագությունը լինի զրո: Այսպիսով ստանում ենք՝

$$v = \frac{d}{2\pi n} \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad n = 1, 2, \dots:$$

Պատ. $v = \frac{d}{2\pi n} \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad n = 1, 2, \dots:$

Խնդիր 5.5: m_1 և m_2 զանգվածներով երկու մարմին կապված են l երկարությամբ թելով և շարժվում են հորիզոնական ողորկ մակերևույթով (նկ. 5.7): Ժամանակի



Նկ. 5.7

ինչ-որ պահին առաջին մարմինն անշարժ է, իսկ երկրորդի արագությունը հավասար է v - ի և ուղղահայց է թելին: Որոշեք թելի լարման ուժը [21]:

Լուծում: Ինչպես և նախորդ խնդրում, այս դեպքում էլ Երկրի հետ կապված հաշվարկման համակարգի նկատմամբ դժվար է կողմնորոշվել, թե ինչի՞ց և ինչպե՞ս սկսել խնդրի լուծումը: Իրոք, այնքան էլ պարզ չէ, թե ինչպիսի՞ շարժումներ են կատարում գնդիկները Երկրի նկատմամբ: Գնդիկների շարժումը քննարկենք դրանց զանգվածների կենտրոնի հետ կապված C հաշվարկման համակարգում: Այդ համակարգում մարմինների զանգվածների կենտրոնը դադարի վիճակում է, իսկ մարմինները պտտվում են նրա շուրջը համապատասխանաբար r_1 և r_2 շառավիղներով: Վերջիններս գտնելու համար օգտվենք զանգվածների կենտրոնի որոշման բանաձևից և այն հանգամանքից, որ մարմինների միջև եղած հեռավորությունը l է՝

$$m_1 r_1 = m_2 r_2, \quad r_1 + r_2 = l:$$

Լուծելով այս համակարգը ստանում ենք.

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l, \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l:$$

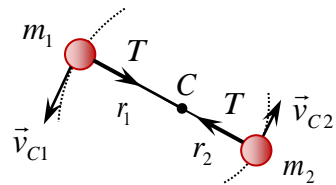
Այժմ անհրաժեշտ է որոշել մարմինների պտտական շարժման v_{C1} և v_{C2} արագությունները C համակարգում: Համաձայն խնդրի պայմանի Երկրի հետ կապված հաշվարկման համակարգում տվյալ պահին առաջին մարմնի արագությունը զրո է, իսկ երկրորդի արագությունը հավասար է v -ի ($v_1 = 0, v_2 = v$): Ուրեմն մարմինների զանգվածների կենտրոնի արագությունը անշարժ համակարգի նկատմամբ կլինի՝

$$\vec{v}_C = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 \vec{v}}{m_1 + m_2}:$$

Օգտվելով արագությունների գումարման կանոնից և հաշվի առնելով զանգվածների կենտրոնի արագության արտահայտությունը, C համակարգում m_1 և m_2 զանգվածներով մարմինների արագությունների համար համապատասխանաբար ստանում ենք հետևյալ արտահայտությունները

$$\vec{v}_{C1} = \vec{v}_1 - \vec{v}_C = -\vec{v}_C = -\frac{m_2 \vec{v}}{m_1 + m_2},$$

$$\vec{v}_{C2} = \vec{v}_2 - \vec{v}_C = \vec{v} - \vec{v}_C = \frac{m_1 \vec{v}}{m_1 + m_2}:$$



Նկ. 5.8

C համակարգում m_1 և m_2 զանգվածներով մարմիններին կենտրոնաձիգ արագացում են հաղորդում դրանց վրա ազդող թելի լարման ուժերը (նկ. 5.8):

Հետևաբար, համաձայն Նյուտոնի երկրորդ օրենքի.

$$T = \frac{m_1 v_{C1}^2}{r_1} = \frac{m_2 v_{C2}^2}{r_2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{v^2}{l}:$$

Պատ. ` $T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{v^2}{l}:$

Այժմ քննարկենք մաթեմատիկայում հաշվարկման համակարգի փոփոխության արդյունավետության հետ կապված որոշ հարցեր: Ինչպես գիտենք, մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում կիրառվում է թվագրության 10-ական հաշվարկման դիրքային համակարգը, սակայն ինֆորմատիկայի դպրոցական դասընթացում դիտարկվում են նաև թվագրության դիրքային այլ համակարգեր՝ 2-ական, 3-ական, 8-ական, 16-ական և այլն, ինչպես նաև մեկ դիրքային համակարգից մյուսին անցման հարցեր [5]:

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում հանդիպում են տարբեր ոչ տիպային խնդիրներ, որոնց լուծման ժամանակ հարմար է կատարել թվագրության դիրքային համակարգի փոփոխություն:

Ստորև կդիտարկենք մի քանի ոչ տիպային մաթեմատիկական խնդիրներ, ի ցույց դնելով առանձին դեպքերում թվագրության 10-ական հաշվարկման դիրքային համակարգի փոփոխման օգտակարությունն ու արդյունավետությունը::

Խնդիր 5.6: Ապացուցել, որ կամայական բնական n -ի դեպքում $(8^n - 1)$ -ը բաժանվում է 7 -ի [9]:

Լուծում: Մինչ լուծմանն անցնելը նշենք, որ այս խնդիրը [9] դասագրքում դիտարկվում է «Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը» պարագրաֆի խնդիրների բաժնում և ենթադրվում է, որ պնդումը պետք է ապացուցել լրիվ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով, սակայն մենք ստորև կվարվենք այլ կերպ: Կատարենք հաշվարկման համակարգի փոփոխություն՝ անցում կատարելով թվագրության 8-ական դիրքային համակարգի: Ունենք՝ $7_{10} = 7_8$; $(8^n - 1)_{10} = \left(77\dots7\right)_8$: Հեշտ է նկատել, որ $\left(77\dots7\right)_8 = \left(11\dots1\right)_8 \cdot 7_8$, հետևաբար ակնհայտ է, որ կամայական բնական n -ի դեպքում $\left(77\dots7\right)_8 : 7_8$: Պնդումն ապացուցված է:

Հավելենք, որ նմանատիպ մոտեցման արդյունքում, ընդհանրացնելով վերը դիտարկված պնդումը, հեշտությամբ կարելի է ապացուցել, որ կամայական $k \geq 2$ և n բնական թվերի դեպքում $(k^n - 1)$ -ը բաժանվում է $(k - 1)$ -ի, ինչի համար բավական է թվագրության հաշվարկման 10-ական համակարգից անցում կատարել k -ական համակարգի:

Խնդիր 5.7: Պարզել, որ բնական n -ի դեպքում $(2^n - 1)$ -ը բաժանվում է 7-ի [31]:

Լուծում: Կատարենք հաշվարկման համակարգի փոփոխություն՝ անցում կատարելով թվագրության 2-ական դիրքային համակարգի: Ունենք՝ $7_{10} = 111_2$; $(2^n - 1)_{10} = \left(11\dots1\right)_2$:

Հեշտ է նկատել, որ $(11\dots1)_2$ -ը կրճատվի 111_2 -ի վրա այն և միայն այն դեպքում, երբ n -ը կլինի 3-ի բազմապատիկ, այսինքն՝ $n = 3k$ ($k \in N$):

Պատ.՝ $n = 3k$ ($k \in N$):

Ինչպես տեսնում ենք, բաժանելիության վերաբերյալ շատ պնդումներ և խնդիրներ հեշտությամբ կարելի է ապացուցել կամ լուծել՝ թվագրության հաշվարկման 10-ական համակարգից անցում կատարելով որևէ «հարմար» k -ական համակարգի:

Օրինակ, վերը նկարագրած մոտեցման կիրառմամբ, հեշտությամբ կարելի է ապացուցել, որ ոչ մի բնական n -ի դեպքում $(2^n + 1)$ -ը չի բաժանվում է 7-ի (ինչի համար բավական է անցում կատարել 2-ական հաշվարկման համակարգի), կամ հեշտությամբ կարելի է պարզել, որ $(3^n - 1)$ -ը բաժանվում է 13-ի միայն 3-ին պատիկ բնական n -երի դեպքում (ինչի համար բավական է անցում կատարել 3-ական հաշվարկման համակարգի) և այլն:

Ստորև դիտարկենք ևս մեկ խնդիր, որն առաջադրվել է 1997թ-ի ՀՀ դպրոցականների մաթեմատիկական օլիմպիադայի եզրափակիչ փուլին:

Խնդիր 5.8: Ապացուցել, որ N_0 ոչ բացասական ամբողջ թվերի բազմությունից կարելի է առանձնացնել երկու A_1 և A_2 ոչ դատարկ ենթաբազմություններ այնպիսին, որ $A_1 \cap A_2 = \{0\}$ և

ցանկացած բնական թիվ հնարավոր լինի միակ ձևով ներկայացնել $a_1 + a_2$ տեսքով, որտեղ $a_1 \in A_1$ և $a_2 \in A_2$:

Լուծում: Բոլոր ոչ բացասական ամբողջ թվերը ներկայացնենք թվագրության հաշվարկման 2-ական դիրքային համակարգում: A_1 բազմության մեջ ներառենք 0-ն և բոլոր այն բնական թվերը, որոնց գրառման մեջ զույգ կարգահամարով դիրքերում միայն 0-ներ են (հաշված օրինակ աջից), իսկ կենտ կարգահամարով դիրքերում՝ 0-ներ կամ 1-եր, իսկ A_2 բազմության մեջ ներառենք 0-ն և բոլոր այն բնական թվերը, որոնց գրառման մեջ զույգ կարգահամարով դիրքերում 0-ներ կամ 1-եր են (դարձյալ հաշված աջից), իսկ կենտ կարգահամարով դիրքերում՝ միայն 0-ներ: Ակնհայտ է, որ երկու նման ենթաբազմությունների ընտրության դեպքում ցանկացած n բնական թիվ միակ ձևով հնարավոր է ներկայացնել $n = a_1 + a_2$ տեսքով, որտեղ $a_1 \in A_1$; $a_2 \in A_2$, ընդ որում $A_1 \cap A_2 = \{0\}$: Պնդումն ապացուցված է:

Ինչպես տեսնում ենք, հաշվարկման հարմար համակարգի ընտրությունը առանձին դեպքերում կարող է հանդիսանալ բավական արդյունավետ և էֆեկտիվ «գործիք» ֆիզիկայի և մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի տարբեր ոչ տիպային խնդիրներ լուծելիս:

**§6. ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԵՎ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԴՊՐՈՑԱԿԱՆ
ԴԱՍԸՆԹԱՑՈՒՄ ՄԻՋԱՌԱՐԿԱՅԱԿԱՆ ԿԱՊԵՐԻ ՈՐՈՇ
ԴՐՄԵՎՈՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ**

Գաղտնիք չէ, որ ուսուցման արդյունավետության, ինչպես նաև կրթության որակի բարձրացման ուղիներից մեկը միջառարկայական կապերի վեր հանումն ու անմիջական կիրառումն է ուսուցման գործընթացում, քանզի այդ կապերի շնորհիվ է, որ դպրոցական դասընթացը դառնում է ամբողջական, իսկ ուսուցումն էլ՝ առավել արդյունավետ և նպատակային:

Միջառարկայական կապերը ժամանակակից աշխարհում գիտության և հասարակության մեջ տեղի ունեցող ինտեգրացիոն գործընթացների անմիջական և կոնկրետ արտացոլանքն են: Այդ կապերը կարևոր դեր են խաղում սովորողների պրակտիկ և տեսական գիտելիքների յուրացման գործընթացում:

Միջառարկայական կապերի վեր հանումն օգնում է սովորողների ձեռք բերած գիտելիքները դարձնել գործնականում առավել իմաստալից և կիրառելի: Այդ կապերը էական դեր են խաղում սովորողների մոտ համակարգային մտածողության զարգացման գործընթացում: Դրանք հնարավորություն են տալիս որևէ ուսումնական առարկայի ուսուցման արդյունքում ձևավորված կարողությունները և հմտությունները փոխանցել այլ առարկաների բնագավառ:

Դիդակտիկայի տեսակետից միջառարկայական կապերի օգտագործումը որոշակիորեն բարձրացնում է ուսուցման

գիտական մակարդակը և նպաստում մատուցվող նյութի հեշտ յուրացմանը: Կարևորելով միջառարկայական կապերի դերը ուսուցման պրոցեսում, Յան Ամոս Կոմենսկին իր «Մեծ դիդակտիկա» աշխատությունում շատ դիպուկ նշում է՝ «առվակները» պետք է միաձուլվեն միմյանց մեջ և հոսեն դեպի «գետը» [13], ի նկատի ունենալով, որ միևնույն խնդրի, պրոբլեմի վերաբերյալ տարբեր առարկայական, գիտական պատկերացումները՝ «առվակները» պետք է փոխլրացնեն միմյանց և միախառնվելով, հոսեն դեպի իմացության «գետը»:

Այս համատեքստում, արժևորելով առհասարակ ուսուցման պրոցեսում միջառարկայական կապերի վեր հանման կարևորությունն ու օգտակարությունը, ստորև նախապես կանդրադառնանք հանրահաշվի և երկրաչափության, որից հետո մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի միջառարկայական կապերի որոշ դրսևորումների վեր հանմանը:

Ավելորդ չէ նշել, որ հանրահաշվի հանրակրթական կարևորագույն արժեքներից ու առանձնահատկություններից մեկը նրա կիրառությունն է հարակից ուսումնական առարկաներն ուսումնասիրելու, դրանցում առաջացած օրինաչափությունները հասկանալու և հիմնավորելու մեջ: Այստեղ հատկանշականն այն է, որ բացառությամբ հայոց լեզվի, ուսումնական այլ առարկաների (երկրաչափություն, ֆիզիկա, քիմիա, կենսաբանություն և այլն) հետ հանրահաշվի միջառարկայական կապերում «թելադրող» կողմը հենց հանրահաշիվն է:

Առանձնակի «ամուր» են հատկապես երկրաչափության հետ հանրահաշվի միջառարկայական կապերը, որոնք, չնայած վերը

նշած «թելադրող» հանգամանքի, ունեն երկակի բնույթ: Մի կողմից հանրահաշվական գիտելիքը օգտագործվում է երկրաչափական խնդիրներն ու պրոբլեմներն ուսումնասիրելու համար, մյուս կողմից առկա է նաև հակառակ կապը, երբ երկրաչափական խնդիրները լցնում են հանրահաշվական գիտելիքի կիրառման ոլորտը և առարկայական ու առավել հետաքրքիր են դարձնում հանրահաշվական «վերացական» նյութի ուսուցումը:

Ստորև կանդրադառնանք հենց այդ հակառակ կապի հնարավոր կիրառությունների վեր հանմանը, մասնավորապես, նախ համառոտակի կնշենք երկրաչափական այն «գործիքակազմը» և հանրահաշվական խնդիրների այն դասերը, որոնցում երկրաչափական ապարատը կարող է ունենալ իր արդյունավետ և էվրիստիկ կիրառությունը, որից հետո կքննարկենք հանրահաշվի դպրոցական դասընթացում դիտարկվող տարբեր տիպային և ոչ տիպային խնդիրներ և վերջիններիս լուծման համար կառաջարկենք երկրաչափական նոր մոտեցումներ՝ ի ցույց դնելով երկրաչափության ապարատի հնարավոր և օգտակար կիրառությունները հանրահաշվական նյութի ուսուցման պրոցեսում:

6.1 Մոդուլով հավասարումների և անհավասարումների որոշակի դասեր:

Ինչպես գիտենք, հանրահաշվի դպրոցական դասընթացում դիտարկվում են տարբեր տիպի մոդուլով հավասարումներ և անհավասարումներ և մեկից ավել մոդուլ պարունակող հավասարումների կամ անհավասարումների լուծման համար

հայտնի հանրահաշվական մոտեցումը այսպես կոչված միջակայքերի եղանակն է [10], որը որպես մեթոդ էությամբ բավական պարզ ու կիրառելի լինելով հանդերձ մի քանի մոդուլների պարագայում նաև զգալի ժամանակատարը է:

Ստորև, որոշակի դասի մոդուլով հավասարումների և անհավասարումների համար կառաջարկենք լուծման այլ մոտեցում: Այսպես, ի նկատի ունենալով իրական թվի մոդուլի երկրաչափական մեկնաբանությունը, համաձայն որի կամայական a իրական թվի մոդուլը, դա կոորդինատային ուղղի վրա $A(a)$ կետի՝ սկզբնակետից ունեցած հեռավորությունն է, և հետևյալ երկրաչափական հայտնի, ակնհայտ առնչությունները, այն է՝ միևնույն ուղղին պատկանող կամայական $A; B$ և X կետերի համար $AX + BX \geq AB$ [1], ընդ որում.

- հավասարության դեպքը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ X կետը պատկանում է AB հատվածին,
- երբ X կետը չի պատկանում AB հատվածին, ապա $AX + BX = 2XM$, որտեղ M -ը AB հատվածի միջնակետն է,

$|x-a|+|x-b|$ գումարը կարելի է դիտարկել որպես $AX + BX$ հատվածների երկարությունների գումար, որտեղ $A(a)$ -ն, $B(b)$ -ն և $X(x)$ -ը կոորդինատային ուղղին պատկանող կամայական կետեր են: Այսպիսի մոտեցման կիրառման արդյունքում $AX + BX = 2XM$ հավասարությունը հնարավորություն է ընձեռում դիտարկվող երկու մոդուլների

գումարը փոխարինել իրեն համարժեք մեկ մոդուլով և, ըստ այդմ, համապատասխան հավասարումներում կամ անհավասարումներում խուսափել միջակայքերի եղանակից:

Այսպես, համաձայն վեր նշածի, օրինակ $|x-a|+|x-b|=r$ հավասարման համար կունենանք հետևյալ դեպքերը.

- երբ $r < |a-b| \Rightarrow x \in \emptyset$,
- երբ $r = |a-b| \Rightarrow x \in [a;b]$, եթե $a < b$ և $x \in [b;a]$, եթե $b < a$,
- երբ $r > |a-b|$, ապա տրված հավասարումը համարժեք է

$$2 \cdot \left| \frac{a+b}{2} - x \right| = r, \text{ կամ որ նույնն է՝ } |a+b-2x| = r$$

հավասարմանը:

Հեշտ է նկատել, որ առաջարկվող մոտեցման բազմակի կիրառման արդյունքում, նույն կերպ կարող են լուծվել նաև $|\alpha x - a| + |\alpha x - b| = r$; $|x - a| + |x - b| + |2x - c| = r$; $|x - a| + |x - b| + |x - c| + |x - d| = r$ և այլ տիպի հավասարումները կամ համապատասխան անհավասարումները, որոնցում α -ն ($\alpha \neq 0$), a -ն, b -ն, c -ն, d -ն և r -ը կամայական իրական թվեր են:

Քննարկենք մեկ օրինակ:

Խնդիր 6.1: Լուծել $|x+1|+|x-3|=6$ հավասարումը [10]:

Լուծում: Ունենք՝

$$|x+1|+|x-3|=6 \Leftrightarrow |x-(-1)|+|x-3|=6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |3 + (-1) - 2x| = 6 \Leftrightarrow |1 - x| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -2; x_2 = 4 :$$

Պատ.՝ $x_1 = -2; x_2 = 4 :$

6.2 Պարամետրական հավասարումների և համակարգերի որոշակի դասեր:

Ի նկատի ունենալով երկրաչափության դպրոցական դասընթացից հայտնի տարբեր երկրաչափական օբյեկտների փոխադարձ դասավորությունների հնարավոր դեպքերը (օրինակ շրջանագծի և ուղղի կամ երկու շրջանագծերի փոխադարձ դասավորության հնարավոր դեպքերը [2]), պարամետրից կախված բոլոր այն հավասարումները կամ համակարգերը, որոնց երկրաչափական «մեկնաբանությունները» հանգում են, օրինակ, շրջանագծի և ուղղի կամ երկու շրջանագծերի փոխդասավորությունների քննարկմանը, կարող են հեշտությամբ լուծվել երկրաչափական ապարատի անմիջական կիրառման արդյունքում, խուսափելով հայտնի հանրահաշվական մոտեցումներից:

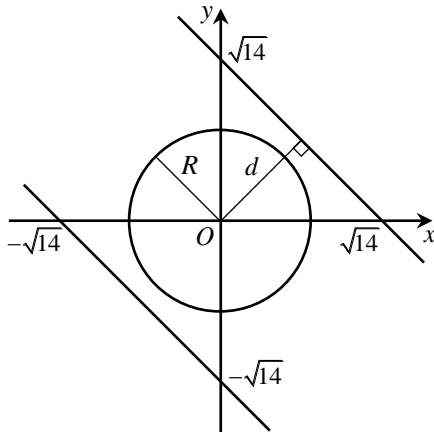
Քննարկենք երկու օրինակ:

Խնդիր 6.2: a պարամետրի n -ր արժեքների դեպքում

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(a+1) \\ (x+y)^2 = 14 \end{cases} \text{ համակարգն ունի ճիշտ երկու լուծում [24]:}$$

Լուծում: Հեշտ է նկատել, որ երբ $2(a+1) \leq 0$, ապա տրված համակարգը լուծում չունի, իսկ երբ $2(a+1) > 0$, ապա համակարգի առաջին հավասարումն xOy ուղղանկյուն

դեկարտյան կոորդինատային համակարգում կներկայացնի $O(0;0)$ կենտրոնով և $R = \sqrt{2(a+1)}$ շառավղով շրջանագիծ, իսկ երկրորդ հավասարումը՝ $y = -x$ ուղղի նկատմամբ համաչափ և կոորդինատների սկզբնակետից կամ որ նույնն է, շրջանագծի կենտրոնից $d = \sqrt{7}$ չափով հեռացված գուգահեռ ուղիղներ (տես նկ.6.1): Պարզ է, որ տրված համակարգը կունենա ճիշտ երկու լուծում այն և միայն այն դեպքում, երբ նշված գուգահեռ ուղիղները կշոշափեն նշված շրջանագիծը, այսինքն երբ



$$R = d \Rightarrow \sqrt{2(a+1)} = \sqrt{7} \Rightarrow a = 2,5:$$

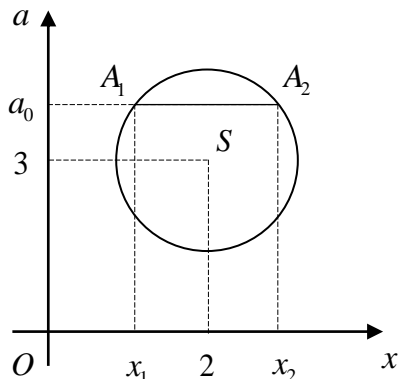
Պատ.՝ $a = 2,5$:

Նկ. 6.1

Խնդիր 6.3: a պարամետրի որ արժեքների դեպքում $x^2 - 4x + a^2 = 6a - 12$ հավասարման իրական արմատների քառակուսիների տարբերության մոդուլը կընդունի մեծագույն արժեք [12]:

Լուծում: Նկատենք, որ տրված ելակետային հավասարումը համարժեք է $(x-2)^2 + (a-3)^2 = 1$ հավասարմանը, որը xOa ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգում ներկայացնում է $S(2;3)$ կենտրոնով և $r = 1$ շառավղով շրջանագծի հավասարում (տես նկ. 6.2): Հեշտ է նկատել, որ եթե

տրված հավասարումը a պարամետրի ինչ որ a_0 արժեքի դեպքում ունի իրական արմատներ, ապա այդ արմատների քառակուսիների տարբերությունը, ի նկատի ունենալով նաև Վիետի թեորեմը, հավասար կլինի



Նկ. 6.2

A_1A_2 լարի երկարության քառապատիկին և ուրեմն, այն կընդունի մեծագույն արժեք, երբ A_1A_2 լարի երկարությունը լինի առավելագույնը: Իսկ դա տեղի կունենա այն և միայն այն դեպքում, երբ A_1A_2 լարը հանդիսանա շրջանագծի տրամագիծ, այսինքն երբ $a = 3$:

Պատ.՝ $a = 3$:

6.3 Հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաներից կազմված տարբեր արտահայտությունների արժեքների որոշում:

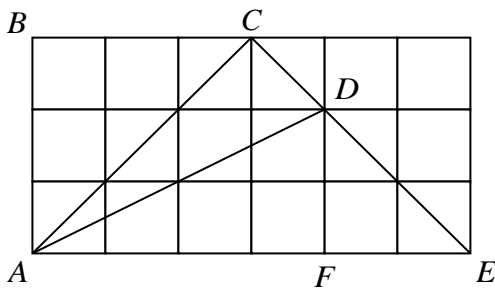
Հանրահաշվի դպրոցական դասընթացում հանդիպում են տարբեր վարժություններ, որոնցում պահանջվում է որոշել հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաներից կազմված տարբեր արտահայտությունների արժեքները և ընդունված հանրահաշվական մոտեցումը ենթադրում է այդ արտահայտությունները դիտարկել որպես անկյուններ, գնահատել վերջիններիս քառորդը և, հաշվելով այդ

անկյունների սինուսը, կոսինուսը, տանգենսը կամ կոտանգենսը, ի վերջո որոշել ելակետային արտահայտության արժեքը [8]: Ստորև կառաջարկենք նմանատիպ խնդիրների լուծման ժամանակ կիրառել այսպես կոչված «քառակուսային ցանցի» մեթոդը, ըստ որի բավական է դիտարկել միավոր կողմով քառակուսիներից կազմված «ցանց» և նրանում, խնդրի պայմաններից ելնելով, հարմար կառուցումների միջոցով, անմիջականորեն հաշվել պահանջվող արհատայտության արժեքը: Առաջարկվող մոտեցումը, կարծում ենք, կարելի է համարել մեթոդ, ելնելով Պոյայի հայտնի այն դիտարկումից, համաձայն որի ամեն մի հնարք, որը կիրառելի է մեկից ավել դեպքերում, կարելի է համարել մեթոդ [44]: Դիտարկենք մեկ օրինակ:

Խնդիր 6.4: Որոշել $\arctg 1 + \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3}$

արտահայտության արժեքը [20]:

Լուծում: Դիտարկենք 6×3 չափսերի քառակուսային ցանցը (տես նկ. 6.3): Հեշտ է նկատել, որ $\angle ACE = 90^\circ$ և $AC = 3CD$: $\triangle ABC$; $\triangle ACD$ և $\triangle ADF$



Նկ. 6.3

ուղղանկյուն եռանկյուններից ունենք՝ $\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{BC}{AB} = 1$;

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \angle CAD &= \frac{CD}{AC} = \frac{1}{3}; \quad \operatorname{tg} \angle DAF = \frac{DF}{AF} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ և քանի որ } \angle BAC; \\ \angle CAD \text{ և } \angle DAF \text{ անկյունները սուր են, ուրեմն } \angle BAC &= \operatorname{arctg} 1; \\ \angle CAD &= \operatorname{arctg} \frac{1}{3}; \quad \angle DAF = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}, \text{ մյուս կողմից } \angle BAC + \\ + \angle CAD + \angle DAF &= \angle BAF \Rightarrow \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}: \end{aligned}$$

Պատ.՝ $\frac{\pi}{2}$:

Հավելենք, որ ըստ նկ. 6.3-ի, դիտարկելով $\triangle CDA$; $\triangle ADF$ և $\triangle DFE$ ուղղանկյուն եռանկյուններում, համապատասխանաբար, $\angle CDA$; $\angle ADF$ և $\angle FDE$ անկյունները, հեշտությամբ կարելի է ապացուցել, որ $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = \pi$:

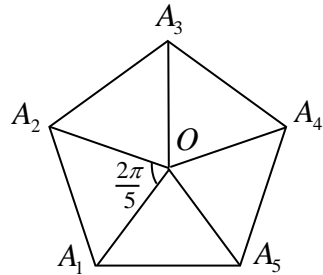
6.4 Եռանկյունաչափական տարբեր հավասարությունների ապացուցում:

Հանրահաշվի դպրոցական դասընթացում հանդիպում են բազում վարժություններ, որոնցում պահանջվում է ապացուցել եռանկյունաչափական տարբեր հավասարություններ և ընդունված հանրահաշվական մոտեցումն ենթադրում է սրված արտահայտությունների ձևափոխություն՝ կիրառելով հիմնական եռանկյունաչափական նույնությունները, բերման բանաձևերը, երկու անկյունների գումարի և տարբերության, կրկնակի անկյան, կես անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերը և այլն [8]: Ստորև կառաջարկենք նմանատիպ դեպքերում դիտարկել «հարմար» եռանկյուններ

կամ բազմանկյուններ և, օգտվելով երկրաչափության դպրոցական դասընթացից հայտնի տարբեր թեորեմներից (օրինակ եռանկյունների համար սինուսների կամ կոսինուսների թեորեմներից կամ վեկտորական տարբեր առնչություններից [3]), անմիջականորեն հանգել պահանջվող հավասարության ապացուցմանը: Դիտարկենք երկու օրինակ:

Խնդիր 6.5: Ապացուցել, որ $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$ [8]:

Լուծում: Դիտարկենք O կենտրոն և միավոր արտագծյալ շրջանագծի շառավիղ ունեցող $A_1A_2A_3A_4A_5$ կանոնավոր բազմանկյունը (տես նկ. 6.4): Երկրաչափության դպրոցական դասընթացից հայտնի է, որ O կենտրոնով կամայական



Նկ. 6.4

$A_1A_2A_3 \dots A_n$ կանոնավոր n -անկյուն բազմանկյան համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝ $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = 0$ [3], հետևաբար $A_1A_2A_3A_4A_5$ կանոնավոր հնգանկյան համար, մասնավորաբար, կունենանք՝ $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5} = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5} \right)^2 = 0 \Rightarrow 5 + 2 \cdot \left(5 \cos \frac{2\pi}{5} + \right.$
 $\left. + 5 \cos \frac{4\pi}{5} \right) = 0 \Rightarrow \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$, ինչն էլ պահանջվում էր ապացուցել:

Հավելենք, որ նմանատիպ մոտեցման արդյունքում,

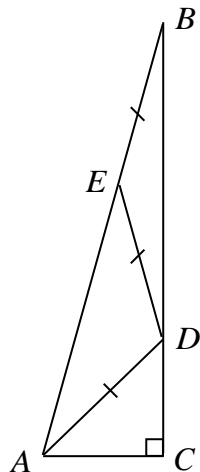
կանոնավոր հնգանկյան փոխարեն դիտարկելով կանոնավոր յոթանկյուն, անմիջականորեն կհանգենք

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2} \text{ հավասարության ապացուցմանը:}$$

Խնդիր 6.6: Ապացուցել հետևյալ հավասարության ճշմարտացիությունը՝

$$\frac{1}{\sin 10^\circ} - 4 \sin 70^\circ = 2 \quad [8]:$$

Լուծում: Դիտարկենք $\angle C = 90^\circ$ ուղիղ անկյունով $\triangle ABC$ ուղղանկյուն եռանկյունը, որում $\angle B = 10^\circ$ և $AC = 1$ (տես նկ. 6.5): Այս եռանկյան BC և AB կողմերի վրա վերցնենք, համապատասխանաբար, D և E կետերն այնպես, որ $\angle CAD = 60^\circ$ և $\angle EDB = 10^\circ$: $\triangle ADC$; $\triangle AED$ և $\triangle BED$ եռանկյուններից



Նկ. 6.5

հեշտ է նկատել, որ $\angle ADC = 30^\circ$; $\angle DAE = \angle DEA = 20^\circ$ և $\angle EDB = \angle EBD = 10^\circ$, հետևաբար կունենանք՝ $BE = ED = DA = 2AC = 2$: Մյուս կողմից $\triangle ABC$ եռանկյան համար սինուսների թեորեմից կստանանք՝

$$\frac{AB}{\sin 90^\circ} = \frac{AC}{\sin 10^\circ} = \frac{1}{\sin 10^\circ} \quad , \quad \text{իսկ } \triangle AED \text{ եռանկյունուց}$$

կունենանք՝ $AE = 2ED \cos 20^\circ = 4 \cos 20^\circ = 4 \sin 70^\circ$: Քանի որ

$$AB - AE = EB \quad , \quad \text{ուրեմն կստանանք՝ } \frac{1}{\sin 10^\circ} - 4 \sin 70^\circ = 2 \quad , \quad \text{ինչն}$$

էլ պահանջվում էր ապացուցել:

Այժմ անդրադառնանք մաթեմատիկա և ֆիզիկա առարկաների միջառարկայական կապի որոշ դրսևորումների

վեր հանմանը: Գաղտնիք չէ, որ այդ կապում «թելադրող» դերում հանդես է գալիս մաթեմատիկան՝ նպաստելով ֆիզիկական տարբեր երևույթների և օրինաչափությունների հիմնավորմանը: Չնայած այդ «թելադրող» հանգամանքի, մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի միջառարկայական կապն ունի երկակի բնույթ: Մի կողմից մաթեմատիկական գիտելիքն օգտագործվում է ֆիզիկական խնդիրներն ու պրոբլեմներն ուսումնասիրելու համար, մյուս կողմից առկա է նաև հակառակ կապը, երբ ֆիզիկական խնդիրները լցնում են մաթեմատիկական գիտելիքի կիրառման ոլորտը և առարկայական ու առավել հետաքրքիր են դարձնում մաթեմատիկական «վերացական» նյութի ուսուցումը:

Ստորև կխոսենք հենց այդ հակառակ կապի հնարավոր կիրառությունների մասին, մասնավորապես, նախ համառոտակի կնշենք ֆիզիկական այն «գործիքակազմը», երբ ֆիզիկական պրոցեսի վերջարդյունքն իր ակնհայտ գոյությամբ և միակությամբ պատասխանում կամ հիմնավորում է մաթեմատիկական հարցապնդմանը, որից հետո կքննարկենք հանրահաշվի և երկրաչափության դպրոցական դասընթացում դիտարկվող տարբեր տիպային և ոչ տիպային խնդիրներ և վերջիններիս լուծման համար կառաջարկենք ֆիզիկական նոր մոտեցումներ՝ ի ցույց դնելով ֆիզիկական գործիքակազմի հնարավոր և օգտակար կիրառությունները մաթեմատիկական նյութի ուսուցման պրոցեսում:

6.5 Հաղորդակից անոթներ:

Ինչպես հայտնի է ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացից, որոշակի ծավալի միևնույն հեղուկով լցված հաղորդակից անոթում հեղուկի մակարդակները հավասար են՝ անկախ

անոթների ձևից (ի նկատի ունենալով, որ մագական երևույթները արհամարհելի են) [16]: Այս ակնհայտ փաստը կիրառենք որոշ հանրահաշվական հարցապնդումների պատասխանելիս:

Խնդիր 6.7: Քանի՞ իրական արմատներ ունի $x^3 + x - 3 = 0$ հավասարումը [36]:

Լուծում: Դիտարկենք հիմքի միավոր մակերեսով գլանական

և $\alpha = 2 \arctg \frac{\sqrt{3\pi}}{\pi}$ գագաթի անկյունով կոնական անոթներից

բաղկացած հաղորդակից անոթը: Պարզ է, որ այս անոթի մեջ ցանկացած ծավալի և, մասնավորաբար, 3 ծավալային միավոր հեղուկ լցնելիս հաղորդակից անոթում կհաստատվի հեղուկի մի ինչ որ x մակարդակ (որը միշտ գոյություն ունի և միակն է): Ըստ այդմ, հաշվելով յուրաքանչյուր անոթում հեղուկի ծավալը, հեղուկի ընդհանուր ծավալի համար կունենանք՝ $x + x^3 = 3$, հետևաբար կարող ենք պնդել, որ ելակետային $x^3 + x - 3 = 0$ հավասարումն ունի ճիշտ մեկ իրական դրական արմատ, որը համաձայն վերոգրյալի, թվապես հավասար է հաղորդակից անոթում հաստատված հեղուկի սյան բարձրությանը: Մյուս կողմից, քանի որ $f(x) = x^3 + x - 3$ ֆունկցիան իր ողջ որոշման տիրույթում մոնոտոն աճող է ($f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1$), կնշանակի $f(x) = 0$ հավասարումը չի կարող ունենալ մեկից ավել իրական արմատներ, հետևաբար այն ունի ճիշտ մեկ իրական արմատ:

Պատ.՝ տրված հավասարումն ունի ճիշտ մեկ իրական արմատ:

Հավելենք, որ նմանատիպ մոտեցմամբ կարելի է ապացուցել նաև, որ $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x - a_0 = 0$ տեսքի յուրաքանչյուր հավասարում, որում $n \in \mathbb{N}$ և $a_0; a_1; \dots; a_n \in \mathbb{R}^+$, իրական թվերի բազմությունում միշտ ունի ճիշտ մեկ իրական դրական արմատ: Ապացուցման համար բավական է a_0 ծավալով հեղուկը դատարկել n հատ համապատասխան կոնտուրներով անոթներից կազմված հաղորդակից անոթի մեջ, որի յուրաքանչյուր i -րդ անոթի կոնտուր ընտրված է այնպես ($i = 1; 2; \dots; n$), որ նրանում x սյունով հեղուկի առկայության դեպքում վերջինիս ծավալը $a_i x^i$ է:

6.6 Չանգվածների կենտրոն:

Ինչպես հայտնի է ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացից, կամայական n քանակի ($n \in \mathbb{N}$) նյութական կետերի համախումբ ունի զանգվածի կենտրոն և այն միակն է, ընդ որում այդ զանգվածի կենտրոնը չի փոխվի, եթե տրված նյութական կետերից մի քանիսից կազմված առանձին համախումբը փոխարինենք իրենց զանգվածի կենտրոնով [17]: Պարզ է, որ երկուսից ավել նյութական կետերի դեպքում մենք կարող ենք համակարգի զանգվածի կենտրոնը որոշել տարբեր կերպ՝ նախապես տարբեր ձևերով խմբավորելով տրված նյութական կետերը: Այս ակնառու փաստը հնարավորություն է տալիս նյութական կետերի զանգվածի կենտրոնի որոշման միջոցով հանգել տարբեր երկրաչափական հարցապնդումների հիմնավորմանը:

Խնդիր 6.8: Ապացուցել, որ յուրաքանչյուր քառանկյան մեջ

հանդիպակաց կողմերի միջնակետերը միացնող հատվածները և անկյունագծերի միջնակետերը միացնող հատվածը հատվում են միևնույն կետում և այդ կետում նրանցից յուրաքայտուրը կիսվում է [32]:

Լուծում: Դիցուք ունենք $ABCD$ քառանկյունը: Այս քառանկյան գագաթներում տեղադրենք միավոր զանգվածներ և ստացված չորս նյութական կետերի զանգվածների կենտրոնը նշանակենք O -ով (պարզ է, որ այն գոյություն ունի և միակն է): Այժմ որոշենք այս համակարգի զանգվածի կենտրոնը, վերը նշված չորս նյութական կետերը տարբեր կերպ երկուական խմբավորելով: Այսպես, դիտարկելով $A; B$ և $C; D$ զույգերը, A և B կետերում տեղադրված միավոր զանգվածները կարող ենք փոխարինել AB հատվածի միջնակետում տեղադրված 2 միավոր զանգվածով, իսկ C և D կետերում տեղադրված միավոր զանգվածները կարող ենք փոխարինել CD հատվածի միջնակետում տեղադրված 2 միավոր զանգվածով, ինչի արդյունքում կարող ենք պնդել, որ ելակետային չորս միավոր զանգվածների O կենտրոնը AB և CD հատվածների միջնակետերը միացնող հատվածի միջնակետն է: Նույն կերպ, դիտարկելով $A; D$ և $B; C$ զույգերը, համանման դաստոգությունների արդյունքում կարող ենք պնդել, որ O կենտրոնը AD և BC հատվածների միջնակետերը միացնող հատվածի միջնակետն է: Եվ, վերջապես, դիտարկելով $A; C$ և $B; D$ զույգերը, ըստ վերոգրյալի կարող ենք պնդել, որ O կենտրոնը AC և BD հատվածների միջնակետերը միացնող հատվածի միջնակետն է: Ըստ էության O ծանրության կենտրոնի գոյության և միակության փաստով հիմնավորվեց, որ

ցանկացած $ABCD$ քառանկյան մեջ հանդիպակաց կոմերի միջնակետերը միացնող հատվածները և անկյունագծերի միջնակետերը միացնող հատվածը հատվում են մի կետում և այդ կետում նրանցից յուրաքայուրը կիսվում է: Պնդումն ապացուցված է:

Հավելենք, որ նմանատիպ մոտեցմամբ հեշտությամբ կարելի է ապացուցել, որ, օրինակ, յուրաքանչյուր եռանկյան միջնագծերը հատվում են մեկ կետում և այդ կետով կիսվում 2:1 հարաբերությամբ մասերի՝ հաշված գագաթից, ինչի համար բավական է կամայական եռանկյան գագաթներում տեղադրել միավոր զանգվածներ և հաշվել ստացված համակարգի զանգվածի կենտրոնը՝ նախապես միավոր զանգվածներից որևէ երկուսը խմբավորելով:

6.7 Մարմինների հավասարակշռությունը:

Ինչպես հայտնի է ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացից, եթե որևէ մարմնի վրա ազդում են որոշակի ուժեր, ապա տվյալ մարմինը կգտնվի հավասարակշռության մեջ այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ ուժերի վեկտորական գումարը, ինչպես նաև կամայական կետով անցնող առանցքի նկատմամբ այդ նույն ուժերի մոմենտների հանրահաշվական գումարը հավասար է զրոյի: Հետևաբար կարող ենք պնդել, որ եթե մարմինն իր վրա ազդող երեք համահարթ ուժերի ազդեցության տակ գտնվում է հավասարակշռության վիճակում, ապա այդ ուժերի ազդման գծերը հատվում են նույն կետում (քանզի հակառակ պարագայում ուժերից որևէ երկուսի համազորով և երրորդ ուժով պայմանավորված ուժազույգը կառաջացներ պտտող մոմենտ): Այս փաստը հնարավորություն է տալիս մարմնի

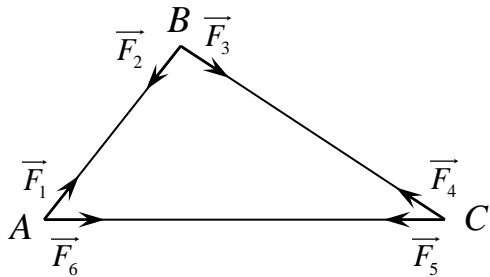
հավասարակշռության պայմանից օգտվելով ապացուցել, որ երեք տարբեր ուղիղներ հատվում են նույն կետում:

Խնդիր 6.9: Ապացուցել, որ կամայական եռանկյան ներքին անկյունների կիսորդներն ընդգրկող ուղիղները հատվում են մեկ կետում [2]:

Լուծում: Դիտարկենք ABC համասեռ եռանկյունաձև թիթեղը, որի A ; B և C գագաթներում կիրառված են մոդուլով միմյանց հավասար \vec{F}_1 ; \vec{F}_2 ; \vec{F}_3 ; \vec{F}_4 ; \vec{F}_5 և \vec{F}_6 ուժերը (տես նկ. 6.6):

Քանի որ \vec{F}_1 և \vec{F}_2 , \vec{F}_3 և \vec{F}_4 , ինչպես նաև \vec{F}_5 և \vec{F}_6 ուժերը միմյանց համակշռում են,

իսկ նրանց ազդման գծերը՝ համընկնում, ուրեմն այս ուժերի ազդեցության ներքո ABC թիթեղը կգտնվի հավասարակշռության վիճակում: Նշանակենք



Նկ. 6.6

$\vec{F}_1 + \vec{F}_6 = \vec{F}_A$; $\vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}_B$; $\vec{F}_4 + \vec{F}_5 = \vec{F}_C$: շեշտ է նկատել, որ

\vec{F}_A ; \vec{F}_B և \vec{F}_C ուժերի ազդման գծերը հանդիսանում են ABC

եռանկյան ներքին անկյունների կիսորդները և քանի որ այս երեք համահարթ ուժերի ազդեցության տակ ABC համասեռ եռանկյունաձև թիթեղը գտնվում է հավասարակշռության վիճակում, ուրեմն, համաձայն վերոգրյալի, այդ ուժերի ազդման գծերը (կամ որ նույնն է՝ ABC եռանկյան ներքին անկյունների կիսորդներն ընդգրկող ուղիղները) հատվում են նույն կետում: Պնդումն ապացուցված է:

Հավելենք, որ նմանատիպ մոտեցմամբ հեշտությամբ կարելի է ապացուցել, որ կամայական եռանկյան միջնագծերը (կամ բարձրությունները) հատվում են մեկ կետում:

6.8 Պոտենցիալ Էներգիայի մինիմումի սկզբունքը:

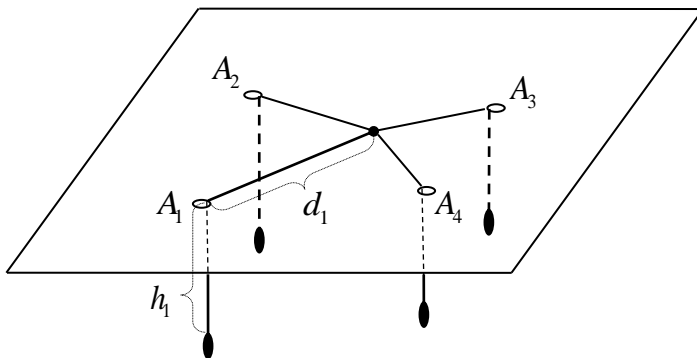
Ինչպես §1-ում արդեն նշել ենք, համաձայն Դիրիխլեի ֆիզիկական սկզբունքի, կոնսերվատիվ ուժերի ազդեցության տակ, կայուն հավասարակշռության վիճակում մեխանիկական համակարգի պոտենցիալ էներգիան ընդունում է մինիմում արժեք: Այս ուշագրաֆ և կարևոր ֆիզիկական սկզբունքն իր օգտակար և արդյունավետ կիրառությունն ունի ոչ միայն ֆիզիկայի, այլ նաև մաթեմատիկայի տարբեր խնդիրներում: Որպես ասվածի հիմնավորում դիտարկենք երկրաչափության դպրոցական դասընթացում քննարկվող հետևյալ խնդիրը:

Խնդիր 6.10: Գոյություն ունի՞ արդյոք $A_1A_2A_3A_4$ ուռուցիկ քառանկյան հարթությանը պատկանող կետ, որի՝ քառանկյան գագաթներից ունեցած հեռավորությունների գումարը նվազագույնն է: Որո՞նք և քանի՞սն են այդպիսի կետերը [3]:

Լուծում: Օգտվելով երկրաչափության դպրոցական դասընթացից հայտնի եռանկյան անհավասարությունից, հեշտությամբ կարելի է հիմնավորել, որ նշված հատկությամբ օժտված կետ ցանկացած $A_1A_2A_3A_4$ ուռուցիկ քառանկյան համար գոյություն ունի, միակն է և համընկնում է այդ քառանկյան անկյունագծերի հատման կետի հետ:

Այդ կետի գոյության, միակության և որոշման համար նշենք մեկ պրակտիկ եղանակ՝ հիմնված ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացից հայտնի պոտենցիալ էներգիայի մինիմումի

սկզբունքի վրա: Այսպես, α հորիզոնական (կոշտ) հարթության վրա դիտարկենք $A_1A_2A_3A_4$ ուռուցիկ քառանկյունը: Այդ քառանկյան $A_1;A_2;A_3;A_4$ գագաթներում բացենք անցքեր: Վերցնենք միևնույն l_0 երկարությամբ չորս չձգվող թելեր, ընդ որում $l_0 > d = \max(A_iA_j)$ ($i; j = \overline{1;4}$): Թելերն անցկացնենք վերը նշած անցքերով, α հարթությունից վերև ընկած մասերի ծայրերը կապենք միմյանց, իսկ α հարթությունից ներքև ընկած մասերից յուրաքանչյուրի ծայրից կախենք m_0 զանգվածով

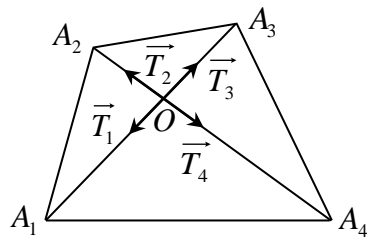


Նկ. 6.7

միատեսակ մեկական գնդիկ (տես նկ.6.7): Պարզ է, որ որոշ ժամանակ անց այդ համակարգը կգտնվի հավասարակշռության վիճակում (թելերի և հարթության շփումը կարելի է անտեսել): Յուրաքանչյուր թելի համար d_i -ով նշանակենք այդ թելի α հարթության վրա գտնվող մասի երկարությունը, իսկ h_i -ով՝ α հարթությունից ներքև գտնվող մասի երկարությունը: Պարզ է, որ $h_i + d_i = l_0$ ($i = \overline{1;4}$): α հարթությունն ընտրենք որպես պոտենցիալ էներգիայի զրոյական մակարդակ: Համաձայն պոտենցիալ էներգիայի

մինիմումի սկզբունքի, կոնսերվատիվ ուժերի դաշտում (մասնավորապես ծանրության ուժադաշտում) մարմինը կամ համակարգը, հասնելով կայուն հավասարակշռության վիճակի, ձգտում է պոտենցիալ էներգիայի մինիմումի [28]: Վերը նշած գնդիկների համակարգը ևս, հասնելով կայուն հավասարակշռության վիճակի, կձգտի պոտենցիալ էներգիայի մինիմումի, այսինքն՝ $E_p = -m_0g(h_1 + h_2 + h_3 + h_4) \rightarrow \min$, հետևաբար $(h_1 + h_2 + h_3 + h_4) \rightarrow \max$, բայց քանի որ $h_i + d_i = l_0 = \text{const}$, ուրեմն $(d_1 + d_2 + d_3 + d_4) \rightarrow \min$: Այսինքն, եթե O -ով նշանակենք կայուն հավասարակշռության վիճակում թելերի ամրակցված ծայրերին համապատասխանող α հարթության կետը, ապա այդ O կետը կլինի այն որոնելի կետը, որի՝ $A_1A_2A_3A_4$ ուռուցիկ քառանկյան գագաթներից ունեցած հեռավորությունների գումարը կլինի նվազագույնը: Քանի որ ցանկացած պարագայում վերը նշած համակարգը որոշակի ժամանակ անց կգտնվի հավասարակշռության վիճակում, ուրեմն որոնելի O կետը միշտ գոյություն ունի և միակն է:

Հեշտ է նկատել (տես նկ. 6.8), որ գնդիկների հավասարակշռությունից կունենանք՝



Նկ. 6.8

$$|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = |\vec{T}_3| = |\vec{T}_4| = m_0g,$$

իսկ O կետի հավասարակշռությունից՝

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 + \vec{T}_4 = 0,$$

հետևաբար $\vec{T}_1 + \vec{T}_3 = \vec{T}_2 + \vec{T}_4 = 0$, և ուրեմն, որոնելի O կետը $A_1A_2A_3A_4$ քառանկյան անկյունագծերի հատման կետն է:

Պատ.՝ յուրաքանչյուր ուռուցիկ քառանկյան համար անկյունագծերի հատման կետն այդ քառանկյան հարթությանը պատկանող այն միակ կետն է, որի՝ քառանկյան գագաթներից ունեցած հեռավորությունների գումարը նվազագույնն է:

§7. ՈՐՈՇ ԷՎՐԻՍՏԻԿ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Էվրիստիկա բառն ունի հունական ծագում, որը բառացի թարգմանված նշանակում է «հայտնաբերում», իսկ ներկայումս այն գիտական ոլորտ է, որն ուսումնասիրում է ստեղծագործական գործունեության առանձնահատկությունները [35]: Առհասարակ, գիտամանկավարժական գործունեության ընթացքում էվրիստիկ մեթոդներ ասելով հասկանում են գիտական հետազոտության այն հնարամիտ ստեղծագործական տրամաբանական հնարքները և մեթոդական կանոնները, որոնք կարող են հանգեցնել նպատակին՝ թերի կամ ոչ լրիվ նախնական տեղեկատվության և խնդրի լուծման գործընթացի կառավարման հստակ ծրագրի կամ ալգորիթմի բացակայության պայմաններում [43]:

Այս համատեքստում ստորև կքննարկենք մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացում դիտարկվող որոշ տիպային և ոչ տիպային խնդիրներ, որոնց լուծման համար կառաջարկենք էվրիստիկ մոտեցումներ, ինչը կարծում ենք կարևոր է ինչպես սովորողների տրամաբանական և ստեղծագործական մտածողության զարգացման, այնպես էլ ներառարկայական և միջառարկայական կապերի վեր հանման և, առհասարակ, ուսուցման արդյունավետության բարձրացման համար:

Այժմ անցնենք օրինակների քննարկմանը:

Խնդիր 7.1: Ապացուցել, որ միմյանցից տարբեր կամայական $a; b; c$ իրական թվերի համար տեղի ունի հետևյալ նույնությունը՝

$$\frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2 \quad [39]:$$

Լուծում: Խնդրի լուծման «ավանդական» մոտեցման համաձայն, անհրաժեշտ է նույնության ձախ մասում կոտորակները բերել ընդհանուր հայտարարի, բացել փակագծերն և կատարել նման անդամների միացում, ինչի արդյունքում, ակնհայտորեն կհանգենք խնդրի պատասխանին: Ստորև կիրառենք այլ մոտեցում: Դիցուք՝

$$f(x) = \frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} - x^2:$$

Հեշտ է նկատել, որ $f(x)$ -ն, ըստ էության մի բազմանդամ է, որի աստիճանը չի գերազանցում 2 -ը, կնշանակի այն կամ երկրորդ աստիճանի բազմանդամ է, կամ առաջին աստիճանի բազմանդամ է, կամ էլ հաստատուն է: Նկատենք, որ $f(a) = f(b) = f(c) = 0$, փաստորեն $f(x)$ -ը 0 արժեքն ընդունում է x փոփոխականի երեք տարբեր $a \neq b \neq c$ արժեքներում, կնշանակի այն չի կարող լինել երկրորդ աստիճանի բազմանդամ (քանզի վերջինս նույն արժեքը կարող է ընդունել փոփոխականի առավելագույնը երկու տարբեր արժեքների դեպքում), ինչպես նաև չի կարող լինել առաջին աստիճանի բազմանդամ (քանզի վերջինս, իր մոնոտոնության շնորհիվ, նույն արժեքը կարող է ընդունել փոփոխականի միայն մեկ արժեքի դեպքում), և ուրեմն, $f(x)$ -ը զրո աստիճանի բազմանդամ է, այսինքն հաստատուն է, և քանի որ $f(a) = f(b) = f(c) = 0$, հետևաբար $f(x) \equiv 0$: Նույնությունն

ապացուցված է:

Խնդիր 7.2: Պարզել, $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$ թիվն ռացիոնալ է, թե իռացիոնալ [33]:

Լուծում: Խնդրի լուծման «ավանդական» մոտեցման համաձայն, անհրաժեշտ է փորձել արմատատակ արտահայտություններում ստանալ լրիվ խորանարդ, ինչի համար, երբ անմիջական կոահման միջոցով դժվարանում են դա անել, սովորաբար օգտվում են անորոշ գործակիցների մեթոդից, ենթադրելով, որ տեղի ունի $9 \pm \sqrt{80} = 9 \pm 4\sqrt{5} = (a \pm b\sqrt{5})^3$ այսպիսի ներկայացում, ինչի արդյունքում a -ի և b -ի նկատմամբ ստանում են հավասարումների համակարգ, որի լուծումով էլ ի վերջո պարզում են, թե տրված ելակետային թիվը ռացիոնալ է, թե իռացիոնալ: Ստորև կվարվենք այլ կերպ:

Նշանակենք $x = \sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$: Այս հավասարության աջ և ձախ մասերը բարձրացնելով խորանարդ և ի նկատի ունենալով $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$ կրճատ բազմապատկման բանաձևը, կստանանք՝

$$\begin{aligned} x^3 &= 18 + 3x \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x^2 - 9x + 6x - 18 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (x-3)(x^2 + 3x + 6) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ x^2 + 3x + 6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x \in \emptyset \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= 3, \text{ հետևաբար ակնհայտ է, որ տրված թիվը ռացիոնալ է} \\ & \text{(դեռ ավելին՝ բնական է):} \end{aligned}$$

Պատ.՝ տրված թիվը ռացիոնալ է:

Խնդիր 7.3: $a; b; c$ դրական թվերը բավարարում են

$a^2 + b^2 - ab = c^2$ հավասարությանը: Ապացուցել, որ $(a - c)(b - c) \leq 0$ [48]:

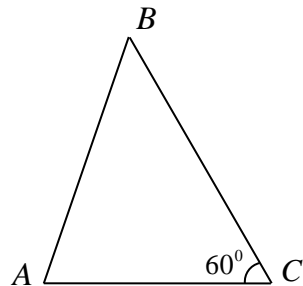
Լուծում: Նկատենք, որ առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ $a \geq b$: Այդ դեպքում, խնդրի լուծման «ավանդական» մոտեցման համաձայն, անհավասարությունների համարժեք ձևափոխությունների արդյունքում հեշտությամբ կարելի է ցույց տալ, որ $a \geq c \geq b$, ինչից էլ անմիջականորեն կհետևի ապացուցվելիք անհավասարության ճշմարտացիությունը: Ստորև կիրառենք այլ մոտեցում:

Ինչպես արդեն նշել ենք, առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ $a \geq b > 0$: Դիտարկենք $\triangle ABC$ -ն, որում $AC = b$; $BC = a$ և $\angle ACB = 60^\circ$ (տես նկ.7.1): Կոսինուսների թեորեմի համաձայն, ունենք՝

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \angle ACB = a^2 + b^2 - ab = c^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow AB = c$: Մյուս կողմից հեշտ է նկատել, որ յուրաքանչյուր

եռանկյան մեջ ամենամեծ ներքին անկյունը չի կարող փոքր լինել 60° -ից, իսկ ամենափոքր ներքին անկյունը չի կարող մեծ լինել 60° -ից, բացի այդ, ինչպես հայտնի է երկրաչափության դպրոցական դասընթացից, կամայական եռանկյան մեջ ավելի մեծ անկյան դիմաց ընկած է ավելի մեծ



Նկ. 7.1

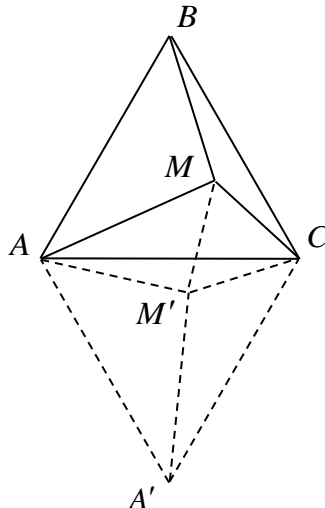
կողմ և ընդհակառակը՝ ավելի մեծ կողմի դիմաց ընկած է ավելի մեծ անկյուն [1], հետևաբար, ի նկատի ունենալով նաև, որ

$BC = a \geq b = AC$, կունենանք՝ $a \geq c \geq b \Rightarrow (a-c)(b-c) < 0$,
ինչն էլ պահանջվում էր ապացուցել:

Խնդիր 7.4: ABC կանոնավոր եռանկյան ներսում ընտրված է M կետն այնպես, որ $AM = 5$; $BM = 4$ և $CM = 3$: Որոշել $\angle BMC$ անկյան աստիճանային չափը [26]:

Լուծում: Խնդրի լուծման «ավանդական» մոտեցման համաձայն, անհրաժեշտ է ΔAMB և ΔAMC եռանկյունների համար կիրառել կոսինուսների թեորեմները և անհրաժեշտ ձևափոխություններից հետո որոշել կանոնավոր եռանկյան կողմը, որից հետո ΔBMC եռանկյունուց, կրկին կոսինուսների թեորեմի կիրառմամբ, որոշել որոնելի $\angle BMC$ անկյան աստիճանային չափը: Ստորև կվարվենք այլ կերպ:

Տրված ABC կանոնավոր եռանկյունը C կետի շուրջը պտտենք ժամսլաքին հակառակ ուղղությամբ 60° -ով, ինչի արդյունքում կունենանք ևս մեկ կանոնավոր եռանկյուն՝ $\Delta AA'C$ -ն, որում M' -ը պտտման արդյունքում M կետի «կերպարն» է (տես նկ. 7.2): Հեշտ է նկատել, որ $\Delta MCM'$ -ը կանոնավոր եռանկյուն է ($CM = CM'$; $\angle MCM' = 90^\circ$) ,



Նկ. 7.2

հետևաբար $MM' = MC = M'C = 3$:
Այժմ դիտարկենք $\Delta AMM'$

եռանկյունը: Ունենք՝

$AM = 5; MM' = 3$ և $AM' = BM = 4 \Rightarrow AM^2 = M'M^2 + M'A^2$
 հետևաբար $\angle AM'M = 90^\circ$ և ուրեմն, $\angle BMC = \angle AM'C =$
 $= \angle AM'M + \angle MM'C = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$:

Պատ. $\angle BMC = 150^\circ$:

Խնդիր 7.5: Ապացուցել, որ եթե $A_1 A_2 \dots A_n$ -ը կանոնավոր n -անկյուն բազմանկյուն է, իսկ O -ն այդ բազմանկյան կենտրոնն է, ապա $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$ [49]:

Լուծում: Խնդրի լուծման «ավանդական» մոտեցման համաձայն բավական է դիտարկել n -ի գույզ և կենտ դեպքերն առանձին-առանձին և, օգտվելով առկա համաչափությունից, ապացուցել խնդրի պնդումը: Ստորև կիրառենք այլ մոտեցում:

Դիցուք O նյութական կետում կիրառված է $\vec{F}_1 = \overrightarrow{OA_1}; \vec{F}_2 = \overrightarrow{OA_2}; \dots; \vec{F}_n = \overrightarrow{OA_n}$ ուժահամակարգը, ընդ

որում $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{F}$ (տես

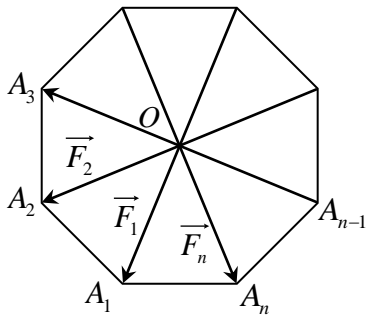
նկ.3): Ակնհայտ է, որ եթե ողջ ուժահամակարգը պտտենք O կիրառման կետի շուրջը ժամսլաքի ուղղությամբ

$$\alpha = \angle A_1 O A_2 = \frac{360^\circ}{n} \text{ անկյունով,}$$

ապա նույն α անկյունով

կպտտվի նաև այդ ուժահամակարգի համագոր վեկտորը՝ դառնալով \vec{F}' , ընդ որում $|\vec{F}| = |\vec{F}'|$ և $\angle(\vec{F}; \vec{F}') = \alpha$: Մյուս

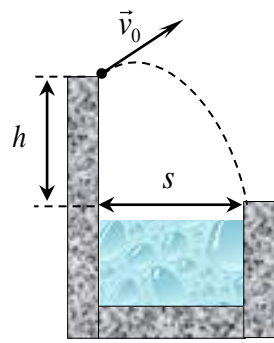
կողմից, ելնելով խնդրի համաչափությունից, հեշտ է նկատել, որ



Նկ. 7.3

որը ուժահամակարգը O կետի շուրջը ժամսլաքի ուղղությամբ $\alpha = \angle A_1OA_2$ անկյունով պտտելիս \vec{F}_1 վեկտորը (ուժը) կվերադարձի \vec{F}_2 վեկտորին (ուժին), \vec{F}_2 վեկտորը կվերադարձի \vec{F}_3 վեկտորին և այդպես շարունակ, \vec{F}_n վեկտորը կվերադարձի \vec{F}_1 վեկտորին և քանի որ $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = \dots = |\vec{F}_n|$, ուրեմն նշված պտույտի դեպքում $\vec{F}_1; \vec{F}_2; \dots; \vec{F}_n$ ուժահամակարգի համագորը չի փոխվի, այսինքն՝ $\vec{F}' = \vec{F}$: Բայց քանի որ $\angle(\vec{F}; \vec{F}') = \alpha \neq 0^\circ$, ուրեմն $\vec{F}' = \vec{F}$ հավասարությունը տեղի կունենա այն և միայն այն դեպքում, երբ $\vec{F}' = \vec{F} = \vec{0}$, հետևաբար $\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \dots + \vec{OA}_n = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{F} = \vec{0}$, ինչն էլ պահանջվում էր ապացուցել:

Խնդիր 7.6: h բարձրությամբ աշտարակից ի՞նչ նվազագույն v_0 սկզբնական արագությամբ պետք է նետել քարը, որպեսզի այն շրջանցելով ընկնի ջրանցքի մյուս ափին, որը նետման կետից հորզոնական ուղղությամբ ունի s հեռավորություն (նկ. 7.4): Օղի դիմադրությունն անտեսել [21]:



Նկ. 7.4

Լուծում: Խնդրի լուծման «ավանդական» մոտեցման դեպքում կազմում են քարի շարժման հավասարումները և արտաքսելով ժամանակը ստանում են նշանակետով անցնող հետագծի

հավասարումը: Այնուհետև, օգտվելով եռանկյունաչափական հայտնի նույնություններից, $tg\alpha$ -ի նկատմամբ ստանում ենք քառակուսային հավասարում (α - ն քարի նետման անկյունն է) և ի վերջո այդ հավասարման դիսկրիմինանտի ոչ բացասական լինելու պայմանից որոշում որոնելի նվազագույն արագությունը:

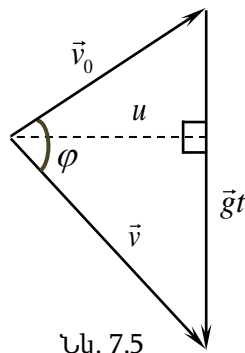
Ստորև կիրառենք այլ մոտեցում:

Նպատակակետին հասնելու պահին քարի \vec{v} արագությունը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t,$$

որին համապատասխանող վեկտորական դիագրամը պատկերված է նկար 7.5 - ում:

Վեկտորական եռանկյան u բարձրությունը քարի արագության հորիզոնական բաղադրիչն է, որը ամբողջ շարժման ընթացքում մնում է հաստատուն, ընդ որում $ut = s$: Այժմ հավասարեցնենք նկ. 7.5-ում պատկերված վեկտորներով պարփակված եռանկյան մակերեսի երկու արտահայտությունները.



Նկ. 7.5

$$\frac{ugt}{2} = \frac{1}{2} v_0 v \sin \varphi, \Rightarrow v_0 v \sin \varphi = gs = const :$$

Ստացված արտահայտությունից պարզ է, որ որոնելի արագությունը կլինի նվազագույն, եթե $\sin \varphi = 1$ և $\varphi = 90^\circ$: Փաստորեն սկզբնական նվազագույն արագության դեպքում \vec{v}_0 և \vec{v} վեկտորները կազմում են ուղիղ անկյուն: Այժմ, օգտվելով ստացված արտահայտությունից և արագությունների կապն

արտահայտող $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ բանաձևից, քարի սկզբնական արագության նվազագույն արժեքի համար ստանում ենք.

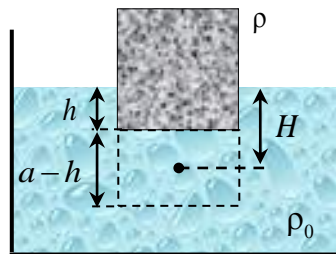
$$v_0 = \sqrt{g(\sqrt{h^2 + s^2} - h)}:$$

Պատ՝ $v_0 = \sqrt{g(\sqrt{h^2 + s^2} - h)}:$

Խնդիր 7.7: a կողմով և ρ խտությամբ ոչ մեծ խորանարդաձև չորսուն լողում է ρ_0 խտությամբ հեղուկում: Ի՞նչ նվազագույն աշխատանք պետք է կատարել չորսուն հեղուկի մեջ լրիվ սուզելու համար: Չորսուի խորասուզման հետևանքով հեղուկի մակարդակի փոփոխությունն անտեսել [28]:

Լուծում: Խնդրի լուծման «ավանդական» մոտեցման դեպքում սկզբում որոշում են խորասուզման ընթացքում չորսուի տեղափոխությունը: Ապա, գրելով հավասարակշռության պայմանը, որոշում են լրիվ խորասուզված վիճակում չորսուն պահելու համար պահանջվող ուժը: Այնուհետև մեխանիկական աշխատանքը հաշվելիս, հաշվի առնելով, որ հավասարաչափ խորասուզման ընթացքում կիրառվող ուժը փոխվում է գծային օրենքով, օգտվում են ուժի միջինի արտահայտությունից:

Ստորև կիրառենք այլ մոտեցում: Չորսուի լողալու պայմանից հետևում է, որ



Նկ. 7.6

հեղուկում ընկղմված մասի h խորության հարաբերությունը չորսուի բարձրությանը հավասար է նրա և հեղուկի

խտությունների հարաբերությանը՝ $h = \frac{\rho}{\rho_0} a$:

Նկատենք, որ երբ չորսուն լրիվ խորասուզում ենք, նրա պոտենցիալ էներգիան նվազում է $\rho a^3 g(a-h)$ չափով, իսկ հեղուկինը, շնորհիվ նկար 7.6-ում պատկերված շտրիխավորված մասի բարձրացման, մեծանում է $\rho_0 a^2(a-h)gH$ - ով, որտեղ H - ը նշված մասի զանգվածի կենտրոնի խորությունն է: Գծագրից ակնհայտ է, որ

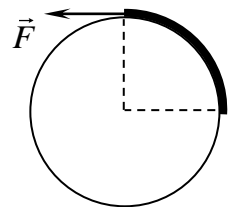
$$H = h + \frac{a-h}{2} = \frac{a+h}{2} :$$

Այժմ, հաշվի առնելով, որ խորասուզման համար կատարված աշխատանքը հավասար է մարմին - հեղուկ համակարգի պոտենցիալ էներգիայի փոփոխությանը, ստանում ենք՝

$$A = \Delta E_p = -\rho a^3 g(a-h) + \rho_0 a^2(a-h)g \frac{a+h}{2} = \frac{g a^4}{2} \frac{(\rho_0 - \rho)^2}{\rho_0} :$$

Պատ՝ $A = g a^4 (\rho_0 - \rho)^2 / 2\rho_0 :$

Խնդիր 7.8: Հորիզոնական ուղղությամբ ի՞նչ F ուժ պետք է կիրառել պարանը նկար 7.7 - ում պատկերված ձևով գլանի վրա հավասարակշռության մեջ պահելու համար: Պարանի զանգվածը m է, իսկ երկարությունը հավասար է գլանի շրջագծի երկարության 1/4 - ին: Գլանն ամրացված է: Շփումն անտեսել [21]:



Նկ. 7.7

Լուծում: Խնդրի լուծման «ավանդական» մոտեցման դեպքում

պարանը մտովի բաժանում են մեծ թվով մասերի, դրանցից յուրաքանչյուրի վրա պատկերում են ազդող ուժերը և գրում հավասարակշռության պայմանները և ապա ստացված հավասարությունների գումարման արդյունքում որոշում որոնելի ուժի մեծությունը: Ստորև կիրառենք այլ մոտեցում:

Նկատենք, որ եթե F ուժը հավասարակշռություն ապահովող արժեքից մի փոքր մեծ լինի, ապա պարանը Δl - ով տեղափոխելիս կկատարի $F\Delta l$ աշխատանք, որի հետևանքով

պարանի պոտենցիալ էներգիան կաճի $\frac{m\Delta l}{L}gR$ - ով: Վերջինս

պայմանավորված է այն հանգամանքով, որ դիտարկված պրոցեսի արդյունքում պարանի Δl երկարությամբ մի կտոր,

որի զանգվածը $\frac{m\Delta l}{L}$ - է, ներքևի ծայրից տեղափոխվում է վերևի

ծայրը: Ուժի կատարած աշխատանքը հավասարեցնելով պոտենցիալ էներգիայի փոփոխությանը և հաշվի առնելով, որ

$$L = \frac{\pi R}{2}, \text{ ուժի մոդուլի համար ստանում ենք } F = \frac{2mg}{\pi}:$$

Պատ՝ $F = 2mg/\pi$:

Խնդիր 7.9: q լիցքը հավասարաչափ բաշխված է R շառավղով կիսաշրջանագծային աղեղի վրա: Որոշել էլեկտրական դաշտի լարվածությունը շրջանագծի կենտրոնում [28]:

Լուծում: Խնդրի լուծման «ավանդական» մոտեցման դեպքում նախ գրում են լիցքավորված աղեղի կամայական անվերջ փոքր էլեմենտի ստեղծած դաշտի լարվածության արտահայտությունը

և ապա տարրական ինտեգրման ճանապարհով հաշվում են արդյունարար դաշտի լարվածությունը:

Ստորև կիրառենք այլ մոտեցում:

Եթե կլիսաշրջանագիծը բաժանենք n հավասար մասերի, ապա նրա յուրաքանչյուր մասին բաժին կընկնի $\frac{q}{n}$ լիցք: Շատ մեծ n - երի դեպքում աղեղի մասերը կարելի է համարել նյութական կետեր: Դրանցից յուրաքանչյուրի ստեղծած դաշտի լարվածությունը աղեղի կենտրոնում կլինի

$$\Delta E_i = k \frac{q}{nR^2} :$$

Արդյունարար դաշտի լարվածությունը ստացվում է

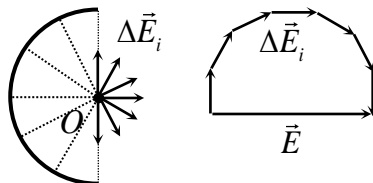
կլիսաօղակի մասերի ստեղծած

$\Delta \vec{E}_i$ էլեկտրական դաշտերի

վեկտորման արդյունքում:

Տարրական դաշտերը

բնութագրող վեկտորները



Նկ. 7.8

մոդուլով հավասար են, իսկ ուղղությամբ մեկը մյուսի

նկատմամբ շեղված են որոշակի հավասար չափերով (նկ. 7.8-ի

ձախ գծապատկեր): Էլեկտրական դաշտի բաղադրիչ

վեկտորները գումարենք նկ. 7.8-ի աջ գծապատկերում

պատկերված ձևով: Արդյունարար էլեկտրական դաշտի

լարվածությունը պատկերված է \vec{E} վեկտորով: \vec{E} վեկտորի

որոշման ճշտությունն այնքան մեծ է, որքան մեծ է n - ը:

Սահմանային դեպքում $\Delta \vec{E}_i$ վեկտորների գումարը

ներկայացնում է կլիսաշրջանագծի տրամագիծը, իսկ

կիսաշրջանագծի \mathbf{E} երկարությունը հավասար է բաղադրիչ վեկտորների մոդուլների գումարին՝

$$\mathbf{E} = n\Delta E_i = k \frac{q}{R^2} :$$

Քանի որ շրջանագծի տրամագիծը հավասար է նրա երկարության $\frac{2}{\pi}$ մասին, որոնելի լարվածության համար ստանում ենք՝

$$E = \frac{2\mathbf{E}}{\pi} = k \frac{2q}{\pi R^2} :$$

$$\text{Պատ՝ } E = k \frac{2q}{\pi R^2} :$$

§8. ԽԱՌԸ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ստորև ներկայացնում ենք մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացում հանդիպող տարբեր տիպային և ոչ տիպային խնդիրներ, որոնք կարող են լուծվել սույն ձեռնարկում նշված սկզբունքների, մեթոդների և եղանակների կիրառմամբ:

8.1 Մաթեմատիկական խնդիրներ:

1. 30 թիվ մասնակցում է ֆուտբոլային մրցաշարին, որի ընթացքում յուրաքանչյուր գույգ միմյանց հետ խաղում են մեկ անգամ: Ապացուցել, որ մրցաշարի ընթացքում յուրաքանչյուր խաղից հետո միշտ կգտնվեն այնպիսի երկու թիմեր, որոնք խաղացած կլինեն հավասար քանակությամբ խաղեր:
2. Հնարավոր է արդյոք 50 հատ քարեր, համապատասխանաբար, 370կգ, 372կգ, 374կգ, ... , 468կգ զանգվածներով, տեղափոխել թվով երեք 7 տոննա բեռնատարողությամբ բեռնատարներով:
3. Միավոր կողմով քառակուսու մեջ ընտրված են կամայական 51 կետեր: Ապացուցել, որ այդ կետերից որևէ երեքը միշտ կարելի է ներառել $1/7$ շառավղով շրջանագծի մեջ:
4. 8×8 չափսերի քառակուսային աղյուսակի վանդակներում գրված են 1-ից 64 բնական թվերը: Ապացուցել, որ միշտ կգտնվեն երկու «հարևան» վանդակներ, որոնցում գրված թվերի տարբերությունը փոքր չէ 5-ից («հարևան»

համարվում են ընդհանուր կողմ ունեցող վանդակները):

5. $a_1; a_2; \dots; a_n; \dots$ -ը միմյանցից տարբեր բնական թվերի կամայական հաջորդականություն է, որի յուրաքանչյուր անդամ մեծ է 1 -ից: Ապացուցել, որ այդ հաջորդականությունում կգտնվեն անվերջ քանակի a_n անդամներ այնպիսին, որ $a_n > n$:
6. $1; 2; 3; \dots; 2020$ թվերից կամայական ձևով ընտրված են 1011 հատը: Ապացուցել, որ ընտրված թվերի մեջ միշտ կգտնվեն այնպիսի երկուսը, որոնցից մեկը բաժանվում է մյուսի վրա:
7. Ապացուցել, որ յուրաքանչյուր ուռուցիկ բազմանիստում կգտնվեն երկու նիստեր միևնույն քանակի կողերով:
8. Հնարավոր է արդյոք $n \times n$ չափսերի աղյուսակի վանդակներում տեղադրել 1; 2 կամ 3 թվերն այնպես, որ բոլոր տողերի, սյուների և անկյունագծերի վրա գրված թվերի գումարները լինեն միմյանցից տարբեր:
9. Տարածության մեջ տրված գնդից դուրս ընտրված են կամայական 9 կետեր: Ապացուցել, որ գնդի արտաքին մակերևույթի վրա կգտնվի կետ, որից «տեսանելի» կլինեն տրված կետերից առավելագույնը 3-ը (գունդը համարել ոչ թափանցիկ):
10. Հարթության վրա տրված է անվերջ քառակուսային ցանց, որում ընտրված են կամայական հինգ հանգույց: Ապացուցել, որ այդ հինգ հանգույցներից (կետերից) միշտ կարելի է ընտրել այնպիսի երկուսը, որոնք միացնող հատվածի միջնակետը ևս հանդիսանում է ցանցի հանգույց:

11. Կոորդինատային հարթության վրա տրված ուռուցիկ բազմանկյան ներքին տիրույթում գտնվում են առնվազն $m^2 + 1$ հատ կետեր, որոնց կոորդինատներն ամբողջ թվեր են: Ապացուցել, որ այդ բազմանկյան ներքին տիրույթում կգտնվեն միննույն ուղղին պատկանող և ամբողջ կոորդինատներ ունեցող $m + 1$ հատ կետեր:
12. 1-ից 200 բնական թվերը կամայական ձևով ընդգրկել են 50 բազմություններում: Ապացուցել, որ բազմություններից մեկում կգտնվեն այնպիսի երեք թվեր, որոնք կարող ենք հանդիսանալ եռանկյան կողմերի երկարություններ:
13. Կարո՞ղ են արդյոք 1; 2; 3; ...; 100 թվերը հանդիսանալ 12 տարբեր երկրաչափական պրոգրեսիաների անդամներ:
14. Ապացուցել, որ գոյություն ունի 11...100...0 տեսքի բնական թիվ, որը բաժանվում է 2020 -ի:
15. Ապացուցել, որ գոյություն ունի 2020-ով վերջացող բնական թիվ, որը բաժանվում է 2019-ի:
16. Գոյություն ունի՞ արդյոք 3 -ի բնական ցուցիչով որևէ աստիճան, որը վերջանում է 0001 -ով:
17. Միավոր կողմով քառակուսու ներսում տեղակայված են մի քանի շրջանագծեր, որոնց երկարությունների գումարը 10 է: Ապացուցել, որ գոյություն ունի ուղիղ, որը հատում է այդ շրջանագծերից առնվազն 4-ը:
18. Տրված են հետևյալ բնական թվերը՝ 1;2;3;4;5;6;7;8;9;10: Յուրաքանչյուր քայլում թույլատրվում է թվերից որևէ երկուսին ավելացնել 1: Հնարավոր է արդյոք որոշակի քայլերից հետո ստանալ միմյանց հավասար թվով տաս

բնական թվեր:

19. 2020 հատ ամբողջ թվերի արտադրյալը հավասար է 1 -ի: Կարո՞ղ է արդյոք այդ թվերի գումարը հավասար լինել 2019-ի:
20. Գրատախտակին գրված են 1; 2; 3; ... ; 101 բնական թվերը: Թույլատրվում է յուրաքանչյուր քայլում ջնջել թվերից որևէ երկուսը և փոխարենը գրել այդ թվերից մեծի և փոքրի տարբերությունը: Հնարավոր է արդյոք 100 այդպիսի քայլերից հետո գրատախտակին գրված լինի 0:
21. $x_1; x_2; \dots; x_n$ թվերից յուրաքանչյուրը հավասար է կամ 1-ի, կամ -1-ի, ընդ որում $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0$: Ապացուցել, որ n -ը բաժանվում է 4-ի:
22. Շախմատի տախտակից հեռացրել են երկու հանդիպակաց անկյունագծային վանդակները: Հնարավո՞ր է արդյոք տախտակի մնացած մասն առանց վերադրման ծածկել 1×2 չափսերի ուղղանկյուններով:
23. Շախմատի ձին իր քայլերն սկսում է $a1$ դաշտից: Հնարավո՞ր է արդյոք 2019 քայլերից հետո ձին կրկին վերադառնա $a1$ դաշտ:
24. Հնարավո՞ր է արդյոք ուռուցիկ 2019-անկյունը կտրասել գուգահեռագծերի:
25. 25 տղաներ և 25 աղջիկներ նստած են կլոր սեղանի շուրջ: Ապացուցել, որ սեղանակիցներից որևէ մեկի երկու «հարևաններն» էլ տղաներ են:
26. 6×6 չափսերի քառակուսին ամբողջությամբ ծածկված է 1×2 ուղղանկյուններով: Ապացուցել, որ քառակուսին կարելի է

կտրատել կողմերից որևէ մեկին զուգահեռ ուղղով՝ «չվնասելով» և ոչ մի ուղղանկյուն:

27. n հատ ամբողջ թվերի արտադրյալը n է, իսկ գումարը՝ 0: Ապացուցել, որ n -ը բաժանվում է 4-ի:
28. Գրատախտակին գրված է 8^{2020} թիվը: Ամեն անգամ թույլատրվում է թիվը փոխարինել իր թվանշանների գումարով, այնուհետև ստացված թիվը կրկին փոխարինել իր թվանշանների գումարով և այդպես շարունակ, քանի դեռ չենք ստացել միանիշ թիվ: Պարզել, թե արդյունքում ինչ միանիշ թիվ կունենանք:
29. Հաջորդականության առաջին անդամը 1 է, իսկ յուրաքանչյուր հաջորդ անդամ ստացվում է իր նախորդին ավելացնելով վերջինիս թվանշանների գումարը: Պարզել, 123456789 թիվն այդ հաջորդականության անդամ է, թե ոչ:
30. Հնարավո՞ր է արդյոք 2018x2019 չափսերի թվային աղյուսակում ուզած ձևով դասավորել կամայական ամբողջ թվեր այնպես, որ աղյուսակի յուրաքանչյուր տողի, ինչպես նաև յուրաքանչյուր սյան վրա գտնվող թվերի գումարի լինի 2020:
31. $f(x)$ քառակուսային եռանդամը թույլատրվում է փոխարինել $x^2 f(1+1/x)$ կամ $(x-1)^2 f(1/(x-1))$ եռանդամներից որևէ մեկով: Հնարավո՞ր է արդյոք այդպիսի փոխարինման բազմակի կիրառման արդյունքում $x^2 + 4x + 3$ եռանդամից ստանալ $x^2 + 10x + 9$ եռանդամը:
- 32-35 համակարգերը լուծել իրական թվերի բազմությունում:

$$32. \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2\sqrt{xy} \\ x + y = 20 \end{cases} :$$

$$34. \begin{cases} x^{3/4} + y^{3/5} = 35 \\ x^{1/4} + y^{1/5} = 5 \end{cases} :$$

$$33. \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{7}{\sqrt{xy}} + 1 \\ \sqrt{x^3y} + \sqrt{y^3x} = 78 \end{cases} :$$

$$35. \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 2, 5\sqrt[6]{xy} \\ x + y = 10 \end{cases} :$$

36-39 հավասարումները լուծել իրական թվերի բազմությունում:

$$36. \sqrt[5]{\frac{1}{2} + x} + \sqrt[5]{\frac{1}{2} - x} = 1 :$$

$$37. x + \sqrt{17 - x^2} + x\sqrt{17 - x^2} = 9 :$$

$$38. x\sqrt[3]{35 - x^3} \left(x + \sqrt[3]{35 - x^3} \right) = 30 :$$

$$39. \sqrt[4]{41 + x} + \sqrt[4]{41 - x} = 2 :$$

40. Ապացուցել, որ $a + b = 1$ պայմանին բավարարող կամայական a և b դրական թվերի համար տեղի ունի

$$\left(a + \frac{1}{a} \right)^2 + \left(b + \frac{1}{b} \right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

անհավասարությունը:

41. Համեմատել $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$ և 1 թվերը:

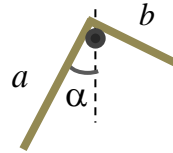
42. n -ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $(2^n - 1)$ -ը բաժանվում է 15-ի վրա:

43. Ապացուցել, որ գոյություն ունի բնական թվերի այնպիսի M ենթաբազմություն, որն օժտված է հետևյալ հատկություններով. ցանկացած բնական թիվ, որը չի պատկանում M -ին, կարելի է ներկայացնել M -ին պատկանող երկու տարբեր բնական թվերի միջին թվաբանականի տեսքով, իսկ M -ին պատկանող և ոչ մի բնական թիվ հնարավոր չէ ներկայացնել այդպիսի տեսքով:

44. Ապացուցել, որ կամայական $a; b; c$ իրական թվերի համար տեղի ունի
$$\frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ac} = \frac{a-b}{1+ab} \cdot \frac{b-c}{1+bc} \cdot \frac{c-a}{1+ac}$$
 նույնությունը:
45. Պարզեցնել
$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$$
 արտահայտությունը:
46. Որոշել $A = \frac{5xy - 12y^2}{x^2 + y^2}$ արտահայտության հնարավոր մեծագույն և փոքրագույն արժեքները, որտեղ x -ը և y -ը կամայական իրական թվեր են:
47. Ապացուցել, որ կամայական 13 իրական թվերից միշտ կարելի է ընտրել այնպիսի x և y թվեր, որոնք բավարարում են
$$0 < \frac{x-y}{1+xy} < \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$
:
48. $ABCD$ քառակուսու ներսում ընտրված է M կետն այնպես, որ $AM : BM : CM = 1 : 2 : 3$: Որոշել $\angle AMB$ անկյան աստիճանային չափը:
49. Հարթության վրա տրված երեք շրջանագծերից յուրաքանչյուր երկուսը ունեն ընդհանուր լար և չկա կետ, որը պատկանում է բոլոր երեք շրջանագծերին: Ապացուցել, որ նշված երեք ընդհանուր լարերը հատվում են մեկ կետում:
50. Տրված $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ միավոր կողով խորանարդի մեջ տարված են $ABCD$ նիստին ներգծյալ և $\Delta A_1B_1C_1$ եռանկյան արտագծյալ երկու շրջանագծեր: Որոշել այդ շրջանագծերի միջև եղած փոքրագույն հեռավորությունը:

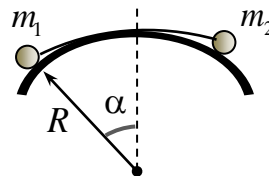
8.2 Ֆիզիկական խնդիրներ:

51. Համասեռ ձողից պատրաստել են անկյունարդ, որի կողմերի երկարությունները հավասար են a - ի և b - ի: Անկյունարդը կախել են ուղղաձիգ պատին մեխված ձողից (նկ. 8.1): Ի՞նչ անկյուն է կազմում a կողմն ուղղաձիգի հետ:



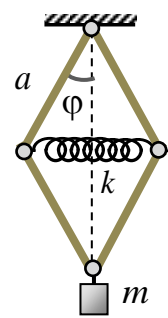
Նկ. 8.1

52. Երկու բեռներ միացված են l երկարությամբ անկշիռ թելով և տեղադրված են R շառավղով ողորկ զլանաձև մակերևույթի վրա: Հավասարակշռության դիրքում ուղղաձիգի և m_1 զանգվածով բեռի գտնվելու կետով տարված շառավղի կազմած անկյունը հավասար է α - ի (նկ. 8.2): Գտեք m_2 բեռի զանգվածը:



Նկ. 8.2

53. Երբ զսպանակավոր հողակապային կախիչից կախում են բեռ կախիչի a կողմով կողմերը ուղղաձիգի նկատմամբ կազմում են φ անկյուն (նկ. 8.3): k կոշտություն ունեցող զսպանակը չդեֆորմացված վիճակում ունի $\sqrt{2}a$ երկարություն: Զսպանակի և կախիչի զանգվածներ անտեսել: Որքա՞ն է կախված բեռի զանգվածը:



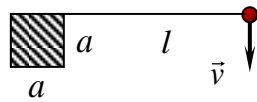
Նկ. 8.3

54. 0,3 գ զանգվածով երեք միատեսակ լիցքերով լիցքավորված գնդիկներ կախված են 30 սմ երկարությամբ, ազատ

ծայրերով մինևույն կետում ամրացված անկշիռ թելերից: Թելերն ուղղաձիգի հետ կազմում են 30° անկյուն: Որքա՞ն է գնդիկներից յուրաքանչյուրի լիցքը:

55. Մագնիտոֆոնի կոճը t ժամանակ նվազում է, երբ ժապավենը շարժվում է հաստատուն v արագությամբ: Կոճի սկզբնական շառավիղը (ժապավենով) R է, իսկ վերջնականը (առանց ժապավենի)՝ r : Գտեք ժապավենի հաստությունը:
56. Տղան սար է բարձրանում 1 մ/վ արագությամբ: Այն պահին, երբ սարի գագաթից տղան գտնվում էր 100 մ հեռավորության վրա, նա բաց է թողնում շանը, որը վազում է դեպի սարի գագաթը և անմիջապես վերադառնում է դեպի տղան, և այդպես շարունակ: Շունը սարը բարձրանում է 3 մ/վ արագությամբ, իսկ սարից իջնում է 5 մ/վ արագությամբ: Որքա՞ն ճանապարհ կանցնի շունը մինչև տղան հասնի սարի գագաթը:

57. Բեռը թելով կապված է a կողմով քառակուսաձև կտրվածք ունեցող չորսուիին (նկ. 8.4): Թելի



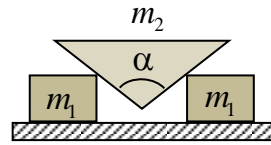
Նկ. 8.4

երկարությունը $l = na$ է (n -ը բնական թիվ է): Թելին ուղղահայաց ուղղությամբ բեռին հաղորդում են v արագություն: Ինչքան ժամանակում ամբողջ թելը կփաթաթվի չորսուիին:

58. Հերմետիկ փակված ամանն ամբողջությամբ լցված է հեղուկով այնպես, որ նրա հատակին կա օդի պղպջակ: Ամանի հատակին ճնշումը p_0 է: Ինչքան կդառնա ճնշումը հատակին, եթե օդի պղպջակը բարձրանա: Ամանի

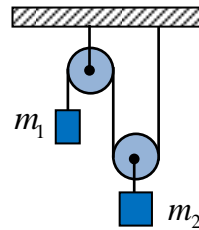
բարձրությունը H է, հեղուկի խտությունը՝ ρ :

59. m_1 զանգվածով երկու միատեսակ չորսունների միջև տեղադրված է m_2 զանգվածով և α անկյունով սեպ (նկ. 8.5): Գտեք մարմինների արագացումները:



Նկ. 8.5

60. Որոշել m_1 և m_2 զանգվածներով բեռների a_1 և a_2 արագացումները, ինչպես նաև թելի լարվածության ուժը նկ. 8.6-ում պատկերված համակարգում: Ճախարակների և թելերի զանգվածները, ինչպես նաև շփումն անտեսել:

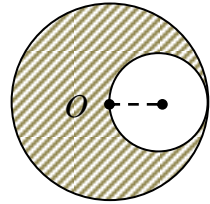


Նկ. 8.6

61. 0,8 մ բարձրություն ունեցող գլանաձև փակ անոթը բաժանված է երկու հավասար մասերի անկշիռ մխոցով, որը կարող է սահել առանց շփման: Ամրացնելով մխոցը՝ գլանի երկու կեսերի մեջ տարբեր զանգվածներով միատեսակ գազ լցրին, ընդ որում, կեսերից մեկում ճնշումը 3 անգամ մեծ դարձավ, քան մյուսում: Ջերմաստիճանը համարել անփոփոխ: Որքանով կտեղափոխվի մխոցը, երբ այն նորից ազատվի:
62. Վառարանը վառելուց հետո 83 մ³ ծավալով չորանցում ջերմաստիճանը փոխվեց 17 °C - ից մինչև 127 °C ջերմաստիճանը: Մթնոլորտային ճնշումը 100 կՊա է, օդի մոլային զանգվածը՝ 0,0029 կգ/մոլ: Որքանով զանգվածով օդ դուրս եկավ չորանցից:

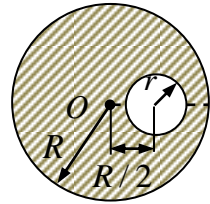
63. Մտիկի 8 միատեսակ կաթիլներից յուրաքանչյուրը լիցքավորված է մինչև $\varphi = 200$ Վ պոտենցիալը: Այդ կաթիլների միացումից ստացվել է մեկ մեծ կաթիլ: Կաթիլներն ընդունել որպես գնդեր: Որքա՞ն է մեծ կաթիլի պոտենցիալը:

64. Բարակ համասեռ թիթեղն ունի R շառավղով շրջանի տեսք: Թիթեղից կտրված, հանված է $\frac{R}{2}$ շառավղով մի շրջան, որի եզրագիծն անցնում է թիթեղի կենտրոնով (նկ. 8.7): Որոշեք ստացված պատկերի ծանրության կենտրոնը:



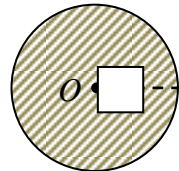
Նկ. 8.7

65. Որոշեք R շառավղով համասեռ բարակ սկավառակի ծանրության կենտրոնը, որից կտրված, հանված է $r < \frac{R}{2}$ շառավղով մի շրջան (նկ. 8.8): Շրջանի կենտրոնի հեռավորությունը սկավառակի կենտրոնից $\frac{R}{2}$ է:



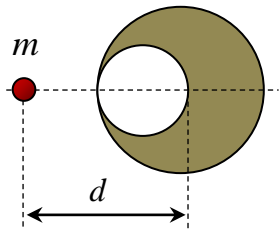
Նկ. 8.8

66. R շառավղով համասեռ շրջանաձև թիթեղից կտրված, հանված է $\frac{R}{2}$ կողմով քառակուսի (նկ. 8.9): Շրջանի կենտրոնը գտնվում է քառակուսու կողմի միջնակետում: Որոշեք ստացված պատկերի զանգվածների կենտրոնը:



Նկ. 8.9

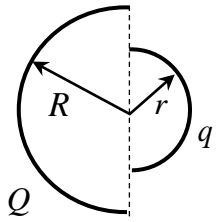
67. R շառավղով կապարե գնդում արված է գնդաձև խոռչ այնպես, որ այն շոշափում է գունդն ու անցնում դրա կենտրոնով (նկ. 8.10): Հոծ գնդի զանգվածը M է: Ինչ ուժով է այդ գունդը ձգում m զանգվածով փոքրիկ գնդիկին, որը գտնվում է գնդի կենտրոնից d հեռավորության վրա՝ գնդի և խոռչի կենտրոնները միացնող ուղղի շարունակության վրա:



Նկ. 8.10

68. ρ ծավալային խտությամբ հավասարաչափ լիցքավորված R շառավղով գնդում փորված է r շառավղով սֆերիկ խոռչ, որի կենտրոնը գտնվում է գնդի կենտրոնից l հեռավորության վրա: Գտեք էլեկտրական դաշտի լարվածությունը գնդի և խոռչի կենտրոնները միացնող ուղղի երկայնքով: Ապացուցեք, որ էլեկտրական դաշտը խոռչում համասեռ է:

69. Գտնել լիցքավորված R և r շառավիղներով կիսագնդային մակերևույթների փոխազդեցության ուժը, եթե դրանց լիցքերը համապատասխանաբար հավասար են Q և q , իսկ կիսագնդերի կենտրոնները համընկնում են (նկ. 8.11):



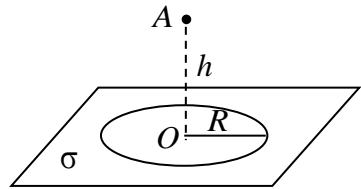
Նկ. 8.11

70. q լիցքը անվերջ հարթ մետաղական մակերևույթից գտնվում է l հեռավորության վրա: Որոշել լիցքի վրա

ազդող ուժը:

71. Բարակ լարն ունի Δl երկարությամբ շատ փոքր ճեղքով R շառավղով շրջանագծի տեսք: Լարի երկայնքով հավասարաչափ բաշխված է q լիցք: Որոշել էլեկտրական դաշտի լարվածությունը շրջանագծի կենտրոնում:
72. R շառավղով գնդի մակերևույթն ունի ΔS շատ փոքր մակերեսով բացվածք և հավասարաչափ դրական լիցքավորված է σ մակերևութային խտությամբ: Որոշել էլեկտրական դաշտի լարվածությունը գնդի կենտրոնում:

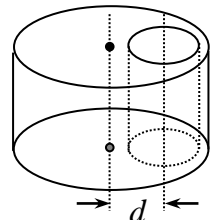
73. σ մակերևութային խտությամբ հավասարաչափ լիցքավորված անվերջ հարթությունից հանված է R շառավղով շրջան: Որոշել էլեկտրական դաշտի լարվածությունը շրջանի առանցքի վրա՝ կենտրոնից h



Նկ. 8.12

բարձրությամբ A կետում (նկ. 8.12):

74. Որոշել մագնիսական դաշտի լարվածությունը հաղորդչի ներսում փորված երկար գլանաձև խոռոչի կամայական կետում, եթե հաղորդչով անցնող հոսանքի խտությունը j է: Խոռոչի առանցքը զուգահեռ է հաղորդչի առանցքին և նրանից ունի d հեռավորություն (նկ. 8.13):



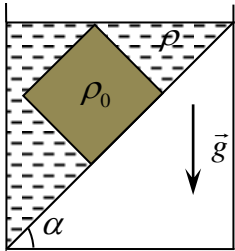
Նկ. 8.13

75. Կինոապարատը 1 վայրկյանում էկրանին պրոյեկտում է 8 կադր: Էկրանին պատկերվում է կանգնած տեղից շարժվող

կառք, որի անիվներն ունեն 1 մետր տրամագիծ և 12 ճաղ: Շարժումն սկսելուց որոշ ժամանակ անց կառքի արագությունը դառնում է 10 մ/վ: Այդ ընթացքում էկրանին պատկերվող անիվը քանի՞ անգամ փոխեց պտտման ուղղությունը:

76. Սեղանի հորիզոնական հարթ, ողորկ մակերևույթի վրա միևնույն ուղղի երկայնքով, առանց միմյանց հետ հպվելու՝ շատ մոտ դասավորված են $n = 2020$ գնդիկներ, միևնույն շառավղով և, համապատասխանաբար, $m; m/2; m/4; \dots; m/2^{n-1}$ զանգվածներով: Գնդիկներին ընդառաջ՝ դասավորության գծի երկայնքով, u արագությամբ շարժվում է $2m$ զանգվածով գունդը: Գտնել այն արագությունը, որը ձեռք կբերի վերջին գնդիկը: Հարվածները համարել ճակատային և բացարձակ առաձգական:

77. ρ_0 խտությամբ a կողմով պողպատե խորանարդը ստանձված է անոթի հարթ հատակին, որը հորիզոնի նկատմամբ կազմում է α անկյուն: Անոթը լցված է ջրով, այնպես, որ խորանարդի վերևի կողը շոշափում է ջրի ազատ մակերևույթը (նկ. 8.14):



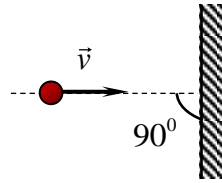
Նկ. 8.14

Մթնոլորտային ճնշումը P_0 է, ջրի խտությունը՝ ρ : Որոշել խորանարդի կողմից թեք հարթության վրա ազդող ճնշման ուժը:

78. V ծավալով մարմինը S մակերես ունեցող հարթ հիմքով հերմետիկորեն ամրացված է անոթի հորիզոնական հարթ հատակին: Անոթի մեջ լցնում են ρ խտությամբ և H բարձրությամբ հեղուկ, այնպես, որ հեղուկը լրիվ ծածկում է մարմնին: Որոշել մարմնի վրա հեղուկի կողմից ազդող ուժը:
79. Խճուղով 16 մ/վ արագությամբ շարժվում է ավտոբուսը, իսկ մարդը գտնվում է խճուղուց 60 մ և ավտոբուսից 400 մ հեռավորության վրա: Ի՞նչ ուղղությամբ պետք է շարժվի մարդը (մարդ - ավտոբուս սկզբնական ուղղության նկատմամբ), որպեսզի խճուղու որևէ կետում հանդիպի ավտոբուսին: Մարդու վազքի արագությունը 4 մ/վ է:
80. A կետում գտնվող դիտորդը B կետում նկատում է հակառակորդի 600 կմ/ժ արագությամբ թռչող ինքնաթիռը, որն AB ուղղի նկատմամբ թռչում է 30° անկյան տակ: Այդ պահին AB ուղղի նկատմամբ ի՞նչ անկյան տակ պետք է A կետից բաց թողնել հրթիռը, որպեսզի այն խփի հակառակորդի ինքնաթիռին: Հրթիռի արագությունը 900 կմ/ժ է:
81. 300 մ երկարությամբ գնացքը շարժվում է ուղղագիծ հավասարաչափ: 25 մ/վ արագությամբ ընթացող ավտոմեքենան շարժվող գնացքի վերջից մինչև սկիզբը և սկզբից մինչև վերջը գնում և վերադառնում է 37,5 վ - ում: Գտնել գնացքի արագությունը:
82. Որոշակի բարձրության վրա գտնվող կետից հորիզոնի նկատմամբ 45° անկյան տակ, 20 մ/վ սկզբնական արագությամբ նետվում են երկու մարմին՝ մեկը ներքև,

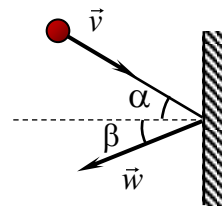
մյուսը՝ վերև: Որոշել մարմինների բարձրությունների տարբերությունը նետումից 2 վ անց:

83. Անշարժ պատին մարմնի բացարձակ առաձգական բախման դեպքում փոխվում է նրա \vec{v} արագության միայն ուղղությունը: Որոշեք բախման հետևանքով մարմնի արագության փոփոխությունը, եթե պատը շարժվում է՝ ա) u արագությամբ դեպի մարմինը, բ) $w < v$ արագությամբ՝ մարմնի շարժման ուղղությամբ (նկ. 8.15):



Նկ. 8.15

84. Մարմինը v արագությամբ հարվածում է պատին դրա նորմալի նկատմամբ α անկյան տակ: Որոշեք մարմնի արագությունը պատին բացարձակ առաձգական հարվածելուց հետո, եթե՝ ա) պատն անշարժ է, բ) շարժվում է իրեն ուղղահայաց ուղղությամբ և w արագությամբ դեպի մարմինը, գ) շարժվում է w արագությամբ՝ իր նորմալի նկատմամբ β անկյան տակ, մարմնին ընդառաջ (նկ. 8.16):



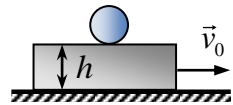
Նկ. 8.16

85. u արագությամբ շարժվող R շառավղով սֆերայի ներսում գտնվում է r շառավղով գնդիկը, որը սֆերայի կենտրոնով անցնելու պահին ունի v արագություն, որն ուղղահայաց է u - ին: Սֆերայի զանգվածը շատ մեծ է գնդիկի զանգվածից: Որոշեք, թե ինչ հաճախությամբ է գնդիկը հարվածում սֆերայի պատին, եթե հարվածը բացարձակ առաձգական է:

86. R շառավղով ատամնանիվը տեղադրված է երկու գուգահեռ ատամնավոր ձողերի միջև: Ձողերը միմյանց ընդառաջ շարժվում են v_1 և v_2 արագություններով: Քանի՞ պտույտ է կատարում ատամնանիվը միավոր ժամանակում:

87. 20 սմ շառավիղ ունեցող գլանը պտտվում է իր առանցքի շուրջը 20 պտ/ր հաճախությամբ: Գլանի ծնիչի ուղղությամբ, նրա մակերևույթի նկատմամբ 30 սմ/վ արագությամբ, շարժվում է մի մարմին: Որոշել այդ մարմնի լրիվ արագության մոդուլն ու արագացումը:

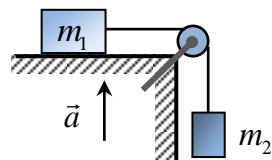
88. h բարձրությամբ հարթ, ողորկ հորիզոնական չորսուի վրա դրված է R շառավղով ողորկ գունդ: Չորսուն սկսում է շարժվել հորիզոնական



Նկ. 8.17

ուղղությամբ \vec{v}_0 հաստատուն արագությամբ (նկ. 8.17): Ի՞նչ հորիզոնական արագություն կունենա գունդը հատակին հարվածելու պահին:

89. Նկար 8.18-ում պատկերված համակարգը գտնվում է վերելակում, որը բարձրանում է a արագացմամբ: Որոշել թելի ձգման ուժը, եթե շփման գործակիցը m_1 զանգվածով բեռի և հենարանի միջև μ է:



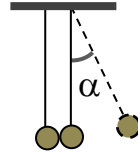
Նկ. 8.18

90. l երկարությամբ անկշիռ չձգվող թելից կախված փոքրիկ գնդիկը գտնվում է հավասարակշռության վիճակում: Ժամանակի ինչ-որ պահից կախման կետը սկսում է

շարժվել հորիզոնական ուղղությամբ v հաստատուն արագությամբ: Նկարագրել մասնիկի շարժումը:

91. h բարձրությունից ընկնող գնդակը կոշտ հատակից

անդրադառնալուց հետո հասնում է $\frac{h}{3}$



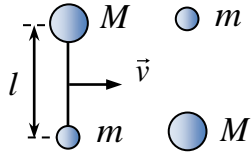
բարձրության: Երկու այդպիսի գնդակ կախված են հավասար երկարությամբ երկար թելերից (նկ. 8.19): Դրանցից մեկը

Նկ. 8.19

շեղում են այնպես, որ թելը ուղղաձիգի հետ կազմում է $\alpha = 5^\circ$ անկյուն և բաց թողնում: Գտեք թելերի առավելագույն շեղման անկյունները գնդակների առաջին բախումից հետո:

92. l երկարությամբ անկշիռ ձողի ծայրերին ամրացված են M և m զանգվածով գնդիկներ:

Համակարգը շարժվելով ձողին ուղղահայաց v արագությամբ, բախվում է անշարժ m և M զանգվածներով գնդիկներին, որոնք միաժամանակ կաշում են

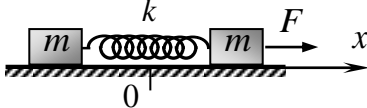


Նկ. 8.20

համապատասխանաբար M և m գնդիկներին (նկ. 8.20): Գտեք ձողի լարման ուժը դրանից հետո:

93. Հորիզոնական ողորկ սեղանի վրա գտնվում են m զանգվածով երկու միատեսակ չորսու, որոնք միացված են k կոշտությամբ և l_0 երկարությամբ զսպանակով (նկ. 8.21):

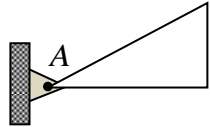
Աջ չորսուի վրա ինչ-որ պահի սկսում է ազդել զսպանակի երկայնքով



Նկ. 8.21

ուղղված հաստատուն F ուժ: Գտեք չորսուների միջև նվազագույն և առավելագույն հեռավորությունները: Գտեք մարմինների կոորդինատները կախված ժամանակից:

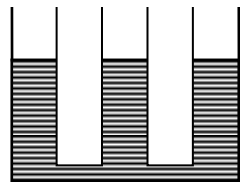
94. Ուղղանկյուն եռանկյան տեսքով պրիզմայաձև անոթը հողակապորեն ամրացված է A առանցքին (նկ. 8.22): Ակնհայտ է, որ եթե այդ անոթը լցնենք զազով այն չի պտտվի այդ առանցքի շուրջը և կշարունակի մնալ հավասարակշռության վիճակում: Ասվածից ստանալ Պյութագորասի թեորեմը:



Նկ. 8.22

95. Միավոր գծային խտությամբ $n+1$ երկարությամբ ձողը մտովի բաժանելով $n+1$ հավասար մասերի և օգտվելով համակարգի զանգվածների կենտրոնի բանաձևից հաշվել $1+2+\dots+n$ վերջավոր գումարը:
96. Միավոր գծային խտությամբ ձողը մտովի բաժանելով $1; 2; \dots; n$ երկարությամբ մասերի և օգտվելով համակարգի զանգվածների կենտրոնի բանաձևից հաշվել $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ վերջավոր գումարը:

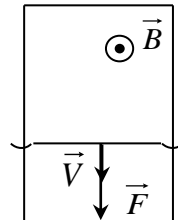
97. Երեք միատեսակ հաղորդակից անոթներում լցված է սնդիկ (նկ. 8.23): Որքանո՞վ կբարձրանա մեջտեղի անոթում սնդիկի մակարդակը, եթե ձախ անոթում լցնեն $H_1 = 102$ մմ, իսկ աջ անոթում՝ $H_2 = 153$ մմ



Նկ. 8.23

բարձրությամբ ջուր: Սնդիկի խտությունը 13600 կգ/մ³ է, ջրինը՝ 1000 կգ/մ³:

98. Երկրի մակերևույթից քարով անհրաժեշտ է հարվածել h բարձրության վրա գտնվող նպատակակետին, որը նետման կետից հորզոնական ուղղությամբ ունի s հեռավորություն: Քարի ինչ նվազագույն v_0 սկզբնական արագության դեպքում է դա հնարավոր: Օղի դիմադրությունն անտեսել:
99. Միննույն $10^{\circ}C$ ջերմաստիճանով 1 կգ և 1,5 կգ զանգվածներով ջրի երկու բաժին տաքացրել են նույն ժամանակամիջոցում՝ մեկը՝ 350 Վտ, մյուսը՝ 650 Վտ հզորությամբ ջեռուցիչներով և այնուհետև՝ խառնել: Խառնուրդի ջերմաստիճանը եղել է $60^{\circ}C$: Որոշել տաքացման ժամանակը:
100. Ս-աձև շրջանակը տեղադրված է իր հարթությանն ուղղահայաց համասեռ մագնիսական դաշտում (նկ. 8.24): Շրջանակի վրայով, առանց շփման, $V = 2$ մ/վ հաստատուն արագությամբ շարժվում է էլեկտրական հպում ապահովող հաղորդալարը (կարճ փակող կապ), որի դիմադրությունը 200 Օմ է: Լարի նկատմամբ կիրառված է $F = 4$ Ն ուժ: Գտնել հոսանքի ուժը լարում: Շրջանակի դիմադրությունը և ծանրության ուժը անտեսել:



Նկ. 8.24

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ ԵՎ ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ

1. **Ցուցում՝** նկատել, որ եթե կա թիվ, որը խաղացել է 29 խաղ, ապա չկա թիվ, որը ոչ մի խաղ խաղացած չլինի:
2. **Պատ.**՝ ոչ, հնարավոր չէ: **Ցուցում՝** նկատել, որ մեքենաներից գոնե մեկով անհրաժեշտ է տեղափոխել առնվազն ութ քար:
3. **Ցուցում՝** միավոր կողմով քառակուսին բաժանել 25 հավասար մասերի:
4. **Ցուցում՝** 1 և 64 թվերը պարունակող վանդակները միացնել «հարևան» վանդակներից կազմված շղթայով: Նկատել, որ այդ շղթայում կարող է լինել առավելագույնը 15 վանդակ: 64-1 տարբերությունը ներկայացնել շղթայի «հարևան» վանդակների թվերի տարբերությունների միջոցով և գնահատել այդ տարբերությունները:
5. **Ցուցում՝** կատարել հակասող ենթադրություն. դիցուք $a_n > n$ պայմանին բավարարող անդամների քանակը վերջավոր է և $a_N = A$ -ն վերջին այդպիսի անդամն է: Ըստ այդմ քնահատել հաջորդականության առաջին $A + N$ հատ անդամների գումարը:
6. **Ցուցում՝** բոլոր թվերը ներկայացնել $2^n \cdot r$ տեսքով (որտեղ n -ը ոչ բացասական ամբողջ թիվ է, իսկ r -ը՝ կենտ բնական թիվ) և գնահատել r -ի հնարավոր արժեքների քանակը:
7. **Ցուցում՝** նկատել, որ n նիստ ունեցող բազմանիստի ամեն մի նիստ կարող է ունենալ նվազագույնը՝ 3, իսկ

առավելագույնը՝ $n-1$ հատ կողեր:

8. Պատ.՝ ոչ, հնարավոր չէ: **Ցուցում**՝ բոլոր պունների, տողերի և անկյունագծերի քանակը համեմատել ստացված գումարների հնարավոր արժեքների քանակի հետ:
9. **Ցուցում**՝ գնդի կենտրոնով և տրված կետերից որևէ երկուսով տանել հարթություն և դիտարկել գնդի այն տրամագիծը, որն ուղղահայաց է այդ հարթությանը:
10. **Ցուցում**՝ ներմուծել ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգ (ցանցի որևէ փոխուղղահայաց կողմեր ընդգրկող) և դիտարկել ընտրված հինգ կետերի կոորդինատների զույգությունը սվյալ կոորդինատային համակարգում:
11. **Ցուցում**՝ նախապես ապացուցել, որ եղած կետերից կարելի է ընտրել այնպիսի $M(k;l)$ և $M_1(k_1;l_1)$ կետեր, որ $k \equiv k_1 \pmod{m}$ և $l \equiv l_1 \pmod{m}$, որից հետո դիտարկել $\left(k + \frac{k-k_1}{m} \cdot i; l + \frac{l-l_1}{m} \cdot i\right)$ կոորդինատներ ունեցող կետերը, որտեղ $0 \leq i \leq m$ և $m \in \mathbb{Z}$:
12. **Ցուցում**՝ դիտարկել հետևյալ 101 հատ թվերը՝ 100; 101; ...; 200:
13. Պատ.՝ ոչ, չեն կարող: **Ցուցում**՝ նախապես ապացուցել, որ երեք տարբեր պարզ թվեր չեն կարող հանդիսանալ միևնույն երկրաչափական պրոգրեսիայի անդամներ:
14. **Ցուցում**՝ բավական է դիտարկել միայն 1-երից կազմված

2021 հատ բնական թվեր:

15. **Ցուցում**՝ ղիտարկել 2020 հատ բնական թիվ, որոնք ստացվել են 2020-ից՝ համապատասխանաբար 1; 2; ...; 2020 անգամ 2020-ն ինքն իրեն կցագրելով:
16. **Պատ.**՝ այո, գոյություն ունի: **Ցուցում**՝ ղիտարկել 10^4 հատ հետևյալ բնական թվերը՝ $3^1; 3^2; \dots; 3^{10^4}$, ի նկատի ունենալով, որ նրանցից և ոչ մեկը չի բաժանվում 10^4 -ի վրա:
17. **Ցուցում**՝ բոլոր շրջանագծերը պրոյեկտել քառակուսու որևէ կողմի վրա և գնահատել պրոյեկցիաների գումարը:
18. **Պատ.**՝ ոչ, հնարավոր չէ: **Ցուցում**՝ գնահատել ամեն քայլից հետո ստացվող թվերի գումարի գույգությունը:
19. **Պատ.**՝ ոչ, չի կարող: **Ցուցում**՝ ղիտարկել այդ գումարի գույգությունը:
20. **Պատ.**՝ ոչ, հնարավոր չէ: **Ցուցում**՝ գնահատել ամեն քայլից հետո ստացվող թվերի գումարի գույգությունը:
21. **Ցուցում**՝ գնահատել $y_1 = x_1x_2; y_2 = x_2x_3; \dots; y_n = x_nx_1$ թվերի գումարը և արտադրյալը:
22. **Պատ.**՝ ոչ, հնարավոր չէ: **Ցուցում**՝ գնահատել սև և սպիտակ վանդակների քանակը:
23. **Պատ.**՝ ոչ, հնարավոր չէ: **Ցուցում**՝ նկատել, որ կենտ քանակով քայլերից հետո ձին կգտնվի այլ գույնի վանդակում:
24. **Պատ.**՝ ոչ, հնարավոր չէ: **Ցուցում**՝ նկատել, որ այդպիսի

հնարավորության դեպքում բազմանկյան ամեն կողմ պետք է ունենար իրեն զուգահեռ մեկ այլ կողմ:

25. **Ցուցում**՝ կատարել հակասող ենթադրություն և նկատել, որ նմանատիպ պնդում կարելի է ձևակերպել նաև աղջիկների համար:
26. **Ցուցում**՝ կատարել հակասող ենթադրություն և նկատել, որ յուրաքանչյուր այդպիսի ուղիղ կվնասի առնվազն երկու 1×2 չափսերի ուղղանկյուն:
27. **Ցուցում**՝ կատարել հակասող ենթադրություն և նկատել, որ եթե $n - 2$ չի բաժանվում 4-ի, ապա նշված n հատ ամբողջ թվերից միայն մեկն է գույգ:
28. **Պատ.**՝ 1: **Ցուցում**՝ օգտվել 9-ի բաժանելիության հայտանիշից:
29. **Պատ.**՝ n_2 : **Ցուցում**՝ օգտվել 9-ի բաժանելիության հայտանիշից:
30. **Պատ.**՝ n_2 , հնարավոր չէ: **Ցուցում**՝ դիտարկել բոլոր թվերի գումարը:
31. **Պատ.**՝ n_2 , հնարավոր չէ: **Ցուցում**՝ նկատել, որ փոխարինման արդյունքում քառակուսային եռանդամը փոխվում է, սակայն դիսկրիմինանտը մնում է նույնը:
32. **Պատ.**՝ $x = 10 + 4\sqrt{6}$; $y = 10 - 4\sqrt{6}$: **Ցուցում**՝ նշանակել $\sqrt{x} = u$; $\sqrt{y} = -v$:
33. **Պատ.**՝ $x_1 = 4$; $y_1 = 9$; $x_2 = -4$; $y_2 = -9$; $x_3 = 9$; $y_3 = 4$; $x_4 = -9$; $y_4 = -4$: **Ցուցում**՝ նշանակել $\sqrt{|x|} = u$; $\sqrt{|y|} = v$:

34. Պատ.՝ $x_1 = 16; y_1 = 243; x_2 = 81; y_2 = 32$: **Ցուցում՝**
 նշանակել $x^{1/4} = u; y^{1/5} = v$:
35. Պատ.՝ $x_1 = \frac{2}{13}; y_1 = \frac{128}{13}; x_2 = \frac{128}{13}; y_2 = \frac{2}{13}$: **Ցուցում՝**
 նշանակել $\sqrt[6]{x} = u; \sqrt[6]{y} = v$:
36. Պատ.՝ $x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = -\frac{1}{2}$: **Ցուցում՝** նշանակել
 $\sqrt[5]{\frac{1}{2} + x} = u; \sqrt[5]{\frac{1}{2} - x} = v$:
37. Պատ.՝ $x_1 = 1; x_2 = 4$: **Ցուցում՝** նշանակել $y = \sqrt{17 - x^2}$:
38. Պատ.՝ $x_1 = 2; x_2 = 3$: **Ցուցում՝** նշանակել $y = \sqrt[3]{35 - x^3}$:
39. Պատ.՝ $x \in \emptyset$: **Ցուցում՝** նշանակել $\sqrt[4]{41 + x} = u; \sqrt[4]{41 - x} = v$:
40. **Ցուցում՝** անցում կատարել $\sigma_1 = a + b$ և $\sigma_2 = ab$ սիմետրիկ
 բազմանդամների և նկատել, որ $\sigma_2 \leq \frac{\sigma_1^2}{4} = \frac{1}{4}$:
41. Պատ.՝ $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1$: **Ցուցում՝** նշանակել $x =$
 $= \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$, x -ի նկատմամբ ստանալ խորանարդ
 աստիճանի հավասարում և որոշել վերջինիս իրական
 արմատները:
42. Պատ.՝ $n = 4k$ ($k \in \mathbb{N}$) : **Ցուցում՝** անցում կատարել
 թվագրության հաշվարկման 4-ական դիրքային
 համակարգի:
43. **Ցուցում՝** անցում կատարել թվագրության հաշվարկման 3-

ական դիրքային համակարգի և M բազմության մեջ ընդգրկել բոլոր այն բնական թվերը, որոնց գրության մեջ (հաշվարկման 3-ական դիրքային համակարգում) մասնակցում են միայն 0 և 1 թվանշանները:

44. **Ցուցում՝** նշանակել $a = tg\alpha$; $b = tg\beta$; $c = tg\gamma$, որտեղ α ; β ; $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$:

45. **Պատ.՝ 1 :** **Ցուցում՝** դիտարկել $f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$ բազմանդամը և հաշվել վերջինիս արժեքը x փոփոխականի a ; b և c արժեքների դեպքում:

46. **Պատ.՝** $\min A = -0,5$; $\max A = 12,5$: **Ցուցում՝** նշանակել $a = r \sin \varphi$; $b = r \cos \varphi$, որտեղ $r \in R^+$ և $\varphi \in [0; 2\pi)$:

47. **Ցուցում՝** տրված 13 կամայական իրական թվերը նշանակել $a_i = tg\alpha_i$ տեսքով, որտեղ $\alpha_i \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; $i = 1; 2; \dots; 13$ և նկատել, որ α_i անկյունների մեջ կգտնվեն այնպիսի α_m և α_n անկյուններ, որոնք բավարարում են հետևյալ կրկնակի անհավասարմանը՝ $0 < \alpha_m - \alpha_n < \frac{\pi}{12}$:

48. **Պատ.՝** 135° : **Ցուցում՝** տրված $ABCD$ քառակուսին B կետի շուրջը ժամսլաքի հակառակ ուղղությամբ պտտել 90° -ով:

49. **Ցուցում՝** խնդրում նշված երեք շրջանագծերի փոխդասավորությունը պատկերացնել որպես երեք սֆերաների օրթոգոնալ պրոյեկցիա իրենց կենտրոններով անցնող հարթության վրա, որոնցից յուրաքանչյուր երկուսը հատվում են շրջանագծով:
50. **Պատ.**՝ $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$: **Ցուցում՝** դիտարկել երկու համակենտրոն սֆերաներ, որոնցից մեկն արտագծված է տրված խորանարդին, իսկ մյուսը շոշափում է խորանարդի բոլոր կողերն իրենց միջնակետերում:
51. **Պատ.**՝ $\arctg \frac{b^2}{a^2}$: **Ցուցում՝** օգտվել հավասարակշռության դիրքում անկյունարդի պոտենցիալ էներգիայի մինիմումի պայմանից:
52. **Պատ.**՝ $m_2 = \frac{m_1 \sin \alpha}{\sin(l / R - \alpha)}$: **Ցուցում՝** նկատել, որ հավասարակշռության դիրքում բեռների ծանրության ուժով պայմանավորված գումարային պոտենցիալ էներգիան ընդունում է նվազագույն արժեք:
53. **Պատ.**՝ $\frac{ka(\sqrt{2}-2 \sin \varphi) \cos \varphi}{g \sin \varphi}$: **Ցուցում՝** նկատի ունենալ, որ հավասարակշռության դիրքում բեռի ծանրության ուժով և զսպանակի առաձգականության ուժով պայմանավորված պոտենցիալ էներգիաների գումարը ընդունում է նվազագույն արժեք:

54. Պատ.՝ $85 \cdot 10^{-9}$ Կլ: **Ցուցում՝** դիտարկել համակարգի վրա ազդող ծանրության ուժով և լիցքերի էլեկտրաստատիկ փոխազդեցություններով պայմանավորված գումարային պոտենցիալ էներգիայի արտահայտությունը և օգտվել դրա մինիմումի պայմանից:
55. Պատ.՝ $d = \frac{\pi(R^2 - r^2)}{vt}$: **Ցուցում՝** հաշվի առնել, որ պրոցեսի ընթացքում ժապավենի ծավալը մնում է հաստատուն: Նշված ծավալի համար գրել երկու արտահայտություններ և հավասարեցնել դրանք:
56. Պատ.՝ 350 մ: **Ցուցում՝** սկզբից ցույց տալ, որ հանդիպումից - հանդիպում շան անցած ճանապարհի հարաբերությունը տղայի անցած ճանապարհին ամբողջ շարժման ընթացքում մնում է հաստատուն:
57. Պատ.՝ $t = \pi an(n+1)/4v$: **Ցուցում՝** նկատել, որ թելի լարվածության ուժի կատարած աշխատանքի գրո լինելու հետևանքով մասնիկի արագության մոդուլը շարժման ընթացքում մնում է հաստատուն:
58. Պատ.՝ $p = p_0 + \rho gH$: **Ցուցում՝** նկատել, որ հեղուկի անսեղմելիության հետևանքով ցանկացած դիրքում օդի պղպջակի ծավալը նույնն է:
59. Պատ.՝ $a_1 = \frac{m_2 g \tan(\alpha/2)}{m_2 + 2m_1 \tan^2(\alpha/2)}$; $a_2 = \frac{m_2 g}{m_2 + 2m_1 \tan^2(\alpha/2)}$:
Ցուցում՝ հաշվի առնելով մարմինների շարժումների կինեմատիկական կապերը, նկատել որ դրանց

արագացումների հարաբերությունը շարժման ընթացքում հաստատուն, անփոփոխ մեծություն է :

60. Պատ.՝ $a_1 = 2 \frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2} g$; $a_2 = \frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2} g$; $T = \frac{3m_1 m_2}{4m_1 + m_2} g$:

Ցուցում՝ հաշվի առնելով բեռների շարժման ընթացքում թելի երկարության անփոփոխ լինելը, որոշել բեռների արագացումների կապը և դինամիկ առնչությունների հետ մեկտեղ կազմել և լուծել հավասարումների համակարգը:

61. Պատ.՝ 0,2 մ: **Ցուցում՝** նկատել, որ գազերի գրաված գումարային ծավալը պրոցեսի ընթացքում մնում է հաստատուն:

62. Պատ.՝ 27,5 կգ: **Ցուցում՝** հաշվի առնել, որ անկախ ջերմաստիճանից հերմետիկության բացակայության հետևանքով չորանոցում օդի ճնշումը միշտ հավասար է մթնոլորտային ճնշմանը:

63. Պատ.՝ 800 Վ: **Ցուցում՝** նկատել, որ կաթիլների միավորման արդյունքում չի փոխվում դրանց գումարային ծավալը:

64. Պատ.՝ Շրջանի կենտրոնից $\frac{R}{6}$ հեռավորության վրա:

Ցուցում՝ կտրվածքը մտովի լրացնելով վերականգնել սկավառակի համաչափությունը և սկզբնական մարմնին համարժեք մարմին ստանալու համար կտրվածքի տեղում դիտարկել լրացուցիչ բացասական զանգվածով մարմին: Կարելի է նաև մարմնից մտովի հեռացնել բացակայող շրջանին համաչափ դասավորված շրջան, և արդյունքում

ստանալ երկու համաչափ մարմիններ, և օգտվելով վերադրման սկզբունքից լուծել խնդիրը:

65. Պատ.՝ \quad Սկավառակի կենտրոնից $\frac{Rr^2}{2(R^2 - r^2)}$

հեռավորության վրա: *Տես խնդիր 64 - ի ցուցումը:*

66. Պատ.՝ Շրջանի կենտրոնից $\frac{R}{4(4\pi - 1)}$ հեռավորության վրա:

Տես խնդիր 64 - ի ցուցումը:

67. Պատ.՝ $F = GmM \left[\frac{1}{d^2} - \frac{1}{8(d - R/2)^2} \right]$: **Ցուցում՝** խոռոչը

լցնելով կապարով վերականգնել խնդրի համաչափությունը և որպեսզի m զանգվածով մարմնի վրա ազդող ուժը չփոխվի ստացված համասեռ գնդի կողմից այդ մարմնի վրա ազդող ուժից հանել ավելացրած գնդի կողմից ազդող ուժը:

68. Պատ.՝ Խոռոչի ներսի բոլոր կետերում դաշտի լարվածությունն ուղղված է գնդերի կենտրոնները միացնող ուղղի երկայնքով և $E = \frac{\rho l}{3\epsilon_0}$: Խոռոչից դուրս.

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[x + \frac{r^3}{(l-x)^2} \right], \quad \text{երբ } 0 < x < l-r;$$

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[x - \frac{r^3}{(l-x)^2} \right], \quad \text{երբ } l+r < x < R;$$

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[\frac{R^2}{x^2} - \frac{r^3}{(l-x)^2} \right], \quad \text{երբ } x > R:$$

Ցուցում՝ նախորդ խնդրի նման խոռոչը լցնելով,

վերականգնել համաչափությունն ու օգտվել վերադրման սկզբունքից:

69. Պատ.՝ $F = k \frac{qQ}{2R^2}$: **Ցուցում՝** հերթականորեն լրացնել

կիսագնդերը և օգտվել վերադրման սկզբունքից:

70. Պատ.՝ $F = k \frac{q^2}{4l^2}$: **Ցուցում՝** լրացնելով ուժագծերը

վերականգնել մետաղական հարթության նկատմամբ համաչափորեն դասավորված այն կետային լիցքը, որը ստեղծում է մակաձված լիցքերին համարժեք էլեկտրական դաշտ:

71. Պատ.՝ $k \frac{q\Delta l}{2\pi R^3}$: **Ցուցում՝** լրացնել շրջանագծի բացակայող

մասը և խնդրի պայմանները չխախտելու համար դիտարկել լրացված մասին համարժեք հակառակ նշանի լիցք կրող տարր:

72. Պատ.՝ $k \frac{\sigma \Delta S}{R^2}$: Տես խնդիր 71 - ի **ցուցումը**:

73. Պատ.՝ $2\pi k \sigma \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}}$: **Ցուցում՝** լրացնել հարթությունն ու

օգտվել դաշտերի վերադրման սկզբունքից:

74. Պատ.՝ $H = 2\pi j d$: **Ցուցում՝** դիտարկել հաղորդիչը առանց խոռոչի և դրա դաշտից հանել ավելացված մասի ստեղծած մագնիսական դաշտը:

75. Պատ.՝ 9: **Ցուցում՝** սկզբում դիտարկել խնդիրն այն դեպքի համար, երբ անիվներն ունեն 4 ճաղ:

76. Պատ.՝ $\left(\frac{4}{3}\right)^{2020}$ *u*: **Ցուցում**՝ նախ ղիտարկել երկու

գնդիկների դեպքը և ապա օգտվել ստացված արդյունքից:

77. Պատ.՝ $F = a^2 \left(P_0 + ga \left(\rho_0 \cos \alpha + \frac{\rho \sin \alpha}{2} \right) \right)$: **Ցուցում**՝

սկզբում քննարկել խնդրի պարզեցված տարբերակը՝ երբ խորանարդի ստորին նիստը հերմետիկորեն ամրացված չէ անոթի հատակին և ապա ուժի արտահայտությունից հանել չորսուի ստորին հիմքի վրա ազդող ճնշման ուժը:

78. Պատ.՝ $F = \rho g (SH - V)$: **Ցուցում**՝ նախ ղիտարկել այն դեպքը, երբ մարմնի և անոթի հատակի հպումը հերմետիկ չէ:

79. Պատ.՝ $36,9^\circ$ կամ $141,1^\circ$: **Ցուցում**՝ ղիտարկել մարդու շարժումը ավտոբուսի հետ կապված շարժական համակարգում:

80. Պատ.՝ $\arcsin(1/3) = 19,5^\circ$: **Ցուցում**՝ հարմար է ղիտարկել ինքնաթիռի նկատմամբ հրթիռի հարաբերական շարժումը:

81. Պատ.՝ 15 մ/վ: **Ցուցում**՝ մեքենայի շարժումը հարմար է քննարկել գնացքի հետ կապված շարժական համակարգում:

82. Պատ.՝ 56,6 մ: **Ցուցում**՝ քննարկել մարմիններից մեկի հարաբերական շարժումը մյուս մեքենայի հետ կապված շարժական համակարգում:

83. Պատ.՝ ա) $\Delta v = -2(v+u)$, բ) $\Delta v = -2(v-w)$: **Ցուցում**՝

մարմնի շարժումը քննարկել շարժվող պատի հետ կապված հաշվարկման համակարգում և վերջում անցում կատարել Երկրի հետ կապված համակարգին:

84. Պատ.՝ ա) $u = v$; բ) $u = \sqrt{v^2 + 4vw \cos \alpha + 4w^2}$;

գ) $u = \sqrt{v^2 + 4vw \cos \alpha \cos \beta + 4w^2 \cos^2 \beta}$: Տես խնդիր 83 - ի **ցուցումը**:

85. Պատ.՝ $v = \frac{\sqrt{v^2 + u^2}}{2(R - r)}$: **Ցուցում՝** խնդիրը քննարկել

մարմինների զանգվածների կենտրոնի հետ կապված հաշվարկման համակարգում:

86. Պատ.՝ $n = \frac{v_1 + v_2}{2R}$: **Ցուցում՝** անցում կատարել ձողերից

մեկի հետ կապված հաշվարկման համակարգի:

87. Պատ.՝ 0.5 մ/վ; 0.88 մ/վ²: **Ցուցում՝** մարմնի արագացման որոշման հարցը քննարկել զլանի ծնիյի ուղղությամբ մարմնի արագությամբ շարժվող իներցիալ հաշվարկման համակարգի նկատմամբ:

88. Պատ.՝ $\frac{R-h}{R} \sqrt{v_0^2 + 2gh} - v_0$: **Ցուցում՝** նպատակահարմար է

պրոցեսը նախ քննարկել չորսուի հետ կապված իներցիալ հաշվարկման համակարգում:

89. Պատ.՝ $\frac{(g+a)(1+\mu)m_1m_2}{m_1+m_2}$, երբ $\mu m_1 < m_2$, $m_2(g+a)$, երբ

$\mu m_1 > m_2$: **Ցուցում՝** խնդիրը հարմար է լուծել հենարանի հետ կապված ոչ իներցիալ հաշվարկման համակարգում:

90. **Ցուցում՝** օգտվելով հարաբերականության սկզբունքից անցում կատարել կախման կետի հետ կապված իներցիալ հաշվարկման համակարգի: Կախված v և l մեծությունների արժեքներից փոքր արագությունների դեպքում գնդիկը կկատարի տատանողական շարժում, իսկ մեծ արագությունների դեպքում՝ անհավասարաչափ շրջանագծային շարժում:

91. **Պատ.**՝ $\varphi_{1,2} = \frac{\alpha}{2} \left(1 \mp \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$: **Ցուցում՝** բախումները քննարկել գնդակների զանգվածների կենտրոնի հետ կապված համակարգում, ապա անցնել անշարժ հաշվարկման համակարգի:

92. **Պատ.**՝ $T = \frac{(M - m)^2 v^2}{2l(M + m)}$: **Ցուցում՝** խնդիրը լուծել մարմինների զանգվածների կենտրոնի հետ կապված համակարգում:

93. **Պատ.**՝ $l_{\min} = l_0$; $l_{\max} = l_0 + \frac{F}{k}$; $x_1 = \frac{F}{4m} t^2 + \frac{l_0}{2} + \frac{F}{4k} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{2k}{m}} t \right)$; $x_2 = \frac{F}{4m} t^2 - \frac{l_0}{2} - \frac{F}{4k} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{2k}{m}} t \right)$:
Ցուցում՝ խնդիրը լուծել չորսուների զանգվածների կենտրոնի հետ կապված ոչ իներցիալ հաշվարկման համակարգում:

94. **Ցուցում՝** դիտարկել գազի կողմից անոթի պատերի վրա ազդող ուժերը և A առանցքի նկատմամբ գրել մոմենտների

կանոնը:

95. Պատ.՝ $n(n+1)/2$: **Ցուցում**՝ գրել զանգվածների կենտրոնի բանաձևը կոորդինատային առանցքն ուղղորդելով ձողի երկայնքով՝ սկզբնակետն ընտրելով ձողի ծայրակետերից մեկը:
96. Պատ.՝ $n^2(n+1)^2/4$: **Ցուցում**՝ կոորդինատային առանցքն ուղղորդել ձողի երկայնքով՝ սկզբնակետն ընտրելով միավոր երկարությամբ մասի ծայրակետը և գրել ձողի մասերի զանգվածների կենտրոնի բանաձևը:
97. Պատ.՝ $\Delta h = 6,25$ մմ: **Ցուցում**՝ նկատել, որ հավասարակշռություն հաստատվելուց հետո բոլոր ծնկներում հեղուկների հիդրոստատիկ ճնշումները հավասար են, հավելյալ ճնշումը բոլոր անոթների մեջ բաշխվում է հավասարաչափ և յուրաքանչյուր անոթում ճնշումն ավելանում է միևնույն չափով:
98. Պատ.՝ $v_0 = \sqrt{g(h + \sqrt{h^2 + s^2})}$: **Ցուցում**՝ պատկերել քարի արագության բանաձևին համապատասխանող վեկտորական դիագրամը: Գրել և հավասարեցնել պատկերված վեկտորներով պարփակված եռանկյան մակերեսի որոշման երկու արտահայտությունները: Ստացված հավասարության համար քննարկել մարմնի սկզբնական արագության նվազագույն լինելու պահանջը:
99. Պատ.՝ 525 վ: **Ցուցում**՝ խնդիրը լուծել առանց ջրերի

*առանձին բաժինների միջանկյալ վիճակները քննարկելու՝
օգտվելով էներգիայի պահպանման օրենքից
անմիջականորեն:*

100. Պատ.՝ 0,2 Ա: *Ցուցում՝ նկատել, որ պրոցեսի ընթացքում
լարի վրա կիրառված արտաքին ուժի աշխատանքը
վերածվում է ջոուլյան ջերմության:*

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Աթանասյան Լ.Ս., Բուտուզով Վ.Ֆ., Կադոմցև Ս.Բ. և ուրիշներ, Երկրաչափություն-7, Դասագիրք հանր. դպր. 7-րդ դաս. համար, Երևան, «Զանգակ-97», 2011.-128 էջ:
2. Աթանասյան Լ.Ս., Բուտուզով Վ.Ֆ., Կադոմցև Ս.Բ. և ուրիշներ, Երկրաչափություն-8, Դասագիրք հանր. դպր. 8-րդ դաս. համար, Երևան, «Զանգակ», 2012.-144 էջ:
3. Աթանասյան Լ.Ս., Բուտուզով Վ.Ֆ., Կադոմցև Ս.Բ. և ուրիշներ, Երկրաչափություն-9, Դասագիրք հանր. դպր. 9-րդ դաս. համար, Երևան, «Զանգակ-97», 2008.-144 էջ:
4. Ավագյան Ռ. և այլք, Ֆիզիկայի խնդիրների ժողովածու, Երևան, 1996.-123էջ:
5. Ավետիսյան Ս.Ս., Դանիելյան Ս.Վ., Ինֆորմատիկա: Ավագ դպրոցի 10-րդ դաս. դասագիրք (բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար). –Եր.: Տիգրան Մեծ, 2010.-128էջ:
6. Գրիգորյան Գ.Վ., Հովակիմյան Ս.Ս., Ղազարյան Է.Ս., Վարդանյան Վ.Ա., Ֆիզիկայի ընտրովի խնդիրների ժողովածու, Երևան, Երևան պոլիգրաֆ. Ձեռնարկ. ԲԲԸ, 1998, 96 էջ:
7. Գրիգորյան Գ.Վ., Փախչանյան Բ.Ա. Ֆիզիկայի հանրապետական օլիմպիադաներ (1983-2003): Երևան: «Էդիթ Պրինտ»: 2003: 224 էջ:
8. Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., Հանրահաշիվ և

- մաթեմատիկական անալիզի տարրեր: Ավագ դպրոցի 10-րդ դասարանի դասագիրք (բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար).-Եր.: Տիգրան Մեծ, 2009.-208 էջ:
9. Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր: Ավագ դպրոցի 11-րդ դասարանի դասագիրք (բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար). – Եր.: Տիգրան Մեծ, 2010.-208 էջ:
10. Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր բնագիտական հոսքի համար, 12-րդ դասարանի դասագիրք, Երևան, «Տիգրան Մեծ», 2011.-208 էջ:
11. Դավթյան Ա.Մ., Ֆիզիկայի խնդիրների լուծման մեթոդական ձեռնարկ, Կինեմատիկա: - Եր.: «Ֆիլին», 2007.-136 էջ:
12. Կարապետյան Ա.Հ., Հանրահաշիվ, վարժությունների ժողովածու, Երևան, «Քվանտ» հրատ., 2000.-236 էջ:
13. Կոմենսկի Յ.Ա., Մեծ դիդակտիկա, Երևան, «Զանգակ» հրատ., 2010.-432 էջ:
14. Հովհաննիսյան Ռ., Շարխատունյան Հ., Սարգսյան Է., Ֆիզիկայի խնդիրների և հարցերի ժողովածու, Եր.: Լույս, 2004.-231 էջ:
15. Ղազարյան Է.Մ., Դպրոցական ֆիզիկայի դասավանդման մեթոդիկայի ընտրովի հարցեր: (Գիտա

- և ուսումնամեթոդական հոդվածների ժողովածու): -
Եր.: «Էդիթ Պրինտ», 2009.-308 էջ:
16. Ղազարյան Է., Կիրակոսյան Ա., Մելիքյան Գ. և ուր.,
Ֆիզիկա 7: Հանրակրթական դպրոցի 7-րդ դասարանի
դասագիրք: Եր.: «Էդիթ Պրինտ», 2013.- 192 էջ:
17. Ղազարյան Է., Կիրակոսյան Ա., Մելիքյան Գ., Մամյան
Ա., Մալիլյան Ս., Ֆիզիկա-10: Ավագ դպրոցի 10-րդ դաս.
դասագիրք ընդհանուր և բնագիտամաթեմատիկական
հոսքերի համար: Եր.: «Էդիթ Պրինտ», 2010.-272էջ:
18. Ղազարյան Է., Կիրակոսյան Ա., Մելիքյան Գ., Մամյան
Ա., Մալիլյան Ս., Ֆիզիկա-11: Ավագ դպրոցի 11-րդ
դասարանի դասագիրք ընդհանուր և
բնագիտամաթեմատիկական հոսքերի համար, Երևան,
«Էդիթ Պրինտ», 2010.-368 էջ:
19. Նիկոլսկի Ս.Ս., Պոտապով Մ.Կ., Ռեշետնիկով Ն.Ն.,
Շևկին Ա.Վ., Հանրահաշիվ 8-րդ դասարանի դասագիրք:
Եր.: Անտարես, 2012.-280 էջ:
20. Սկանավի Մ.Ի., Մաթեմատիկայի մրցույթային
խնդիրների ժողովածու, Երևան, «Լույս», 1988.-544 էջ:
21. Վորոբյով Ի.Ի., Զուբկով Պ.Ի., Կոստուգովա Գ.Ա.,
Սավչենկո Օ.Յա., Տրուբաչով Ա.Ս., Խարիտոնով Վ. Գ.
Ֆիզիկայի խնդիրներ: Ուսումնական ձեռնարկ/ Օ. Յա.
Սավչենկոյի խմբագրությամբ/, Եր.: Տիգրան Մեծ, 2008.-
528 էջ:
22. Абасов А., Хачатрян А., Карабахский конфликт.

- Варианты решения: идеи и реальность, М., 2004.-69с.
23. Агаханов Н.Х. и др., Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2006, М.: МЦНМО, 2007.-472с.
24. Амелькин В.В., Рабцевич В.Л., Задачи с параметрами, Минск, ООО «Асар», 2004.-464с.
25. Бабинская И.Л., Задачи математических олимпиад.- Издательство «Наука», Москва, 1975.-112с.
26. Балаян Э.Н., 800 лучших олимпиадных задач по математике для подготовки к ЕГЭ, Ростов-на-Дону: Феникс, 2013.-317с.
27. Болтянский В.Г., Виленкин Н.Я., Симметрия в алгебре. М.: Наука, МЦНМО, 2002.-240с.
28. Бутиков Е.И., Быков А.А., Кондратьев А.С. Физика в примерах и задачах. Москва. Наука. 1979.-461с.
29. Васильев Н.Б., Савин А.П., Егоров А.А., Избранные олимпиадные задачи. Математика, М.: Бюро Квантум, 2007.-160с.
30. Гольдфарб Н.И., Сборник вопросов и задач по физике, М.: Высшая школа,1969. - 288 с.
31. Горбачев Н.В., Сборник олимпиадных задач по математике.-М., МЦНМО, 2004.-560с.
32. Готман Э.Г., Задачи по планиметрии и методы их решения. М.: Просвещение: АО «Учеб. лит.», 1996.-240с.

33. Егерев В.К., Зайцев В.В., Кордемский Б.А. и др., Сборник задач по математике для поступающих во втузы, Под ред. М.И. Сканави, М.: ООО «ОНИКС-ЛИТ», 2013.-608с.
34. Ибатулин И.Ж., Математические олимпиады. М.: Бином, 2013.-358с.
35. Ивин А.А., Никифоров А.Л., Словарь по логике, М.: Туманит, изд. центр ВЛАДОС, 1997.-384с.
36. Ивлев Б.М., Абрамов А.М., Дудницын Ю.П., Шварцбурд С.И., Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа. М.: Просвещение, 1990.-48с.
37. КВАНТ, научно-популярный физико-математический журнал, задачник «кванта», ISSN 0130-2221, 2000, № 6.
38. Кибанов А.Я., Ворожейкин И.Е., Захаров Д.К., Коновалова В.Г., Конфликтология: Учебник, -М.: ИНФРА, 2014.-301с.
39. Кречмар В.А., Задачник по алгебре, М.: «Наука», 1964.-388с.
40. Левин С., Разрешение конфликтов. От конфликта к сотрудничеству. Олимп-Бизнес, 2008.-248с.
41. Летчиков А.В., Принцип Дирихле. Задачи с указаниями и решениями, Учебное пособие, Ижевск, Изд-во Удм. Ун-та, 1992.-108с.
42. Медников Л.Э., Шаповалов А.В., Турнир городов: мир математики в задачах. М.: МЦНМО, 2017.-472с.
43. Михелькевич В.Н., Радомский В.М., Основы научно-

- технического творчества, изд. Ростов-на-Дону.: Феникс, 2004.-320с.
44. Пойа Д., Математическое открытие, Москва, Издательство «Наука», 1976.-448с.
45. Савин А.П., Энциклопедический словарь юного математика.-М.: Педагогика, 1989.-352с.
46. Турчина Н.В. и др., Физика: 3800 задач для школьников и поступающих в вузы.-М.: Дрофа, 2000. – 672 с.
47. Успенский В.А., Некоторые приложения механики к математике, Гос. Изд. физ-мат лит., Москва, 1958.-50с.
48. Федоров Р.М., Канель-Белов А.Я., Колвальджи А.К., Яценко И.В., Московские математические олимпиады 1993-2005г., М.: МЦНМО, 2006.-456с.
49. Шарыгин И.Ф., Гордин Р.К., Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответамы. М.: ООО «Астрель», 2001.-400с.
50. Шейнов В.П., Управление конфликтами: теория и практика, -Минск: Харвест, 2010.-912с.
51. Шень А., Задачи по математике, М.: МЦНМО, 2000.- 272с.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ԽՄԲԱԳՐԻ ԿՈՂՄԻՑ _____	3
ՆԱԽԱԲԱՆ _____	4
§1. ԴԻՐԻԽԼԵԻ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԵՎ ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ՄԿԶԲՈՒՆՔՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ _____	8
§2. ԻՆՎԱՐԻԱՆՏԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՈՐՈՇ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ _____	28
§3. ՀԱՄԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԿԱՆԳՆՄԱՆ ՄԿԶԲՈՒՆՔԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՈՐՈՇ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ _____	39
§4. ԿՈՆՖԼԻԿՏՆԵՐԻ ԿԱՐԳԱՎՈՐՄԱՆ ՓՈԽԼԱՅԻՆ ԵՂԱՆԱԿԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԵՎ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ՈՐՈՇ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ _____	54
§5. ՀԱՇՎԱՐԿՄԱՆ ՀԱՐՄԱՐ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԸՆՏՐՈՒԹՅԱՆ ԿԱՐԵՎՈՐՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ _____	68
§6. ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԵՎ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԴՊՐՈՑԱԿԱՆ ԴԱՍԸՆԹԱՑՈՒՄ ՄԻՋԱՌԱՐԿԱՅԱԿԱՆ ԿԱՊԵՐԻ ՈՐՈՇ ԴՐՍԵՎՈՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ _____	82
§7. ՈՐՈՇ ԷՎՐԻՍՏԻԿ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ _____	104
§8. ԽԱՌԸ ԽՆԴԻՐՆԵՐ _____	117
ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ ԵՎ ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ _____	137
ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ _____	153

ՆԻԿՈՂՈՍՅԱՆ ԳԱԳԻԿ ՍԵՐՅՈՐՏԱՅԻ
ֆիզմաթ գիտ. թեկնածու
ՍԵՐՈՐՔՅԱՆ ԵՐՎԱՆԴ ՍԵՐՅՈՐՏԻ
ֆիզմաթ գիտ. թեկնածու, դոցենտ
ՄԿՐՏՉՅԱՆ ԳՈՀԱՐ ՀՈՎՀԱՆՆԵՍԻ
առաջին տարակարգի ֆիզիկայի ուսուցչուհի

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԵՎ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ՁԵՌՆԱՐԿ
ՍՈՎՈՐՈՂՆԵՐԻ ԵՎ ՍՈՎՈՐԵՑՆՈՂՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ
(ուսումնամեթոդական ձեռնարկ)

НИКОГОСЯН ГАГИК СЕРЕЖАЕВИЧ
кандидат физмат. наук
СЕРОБЯН ЕРВАНД СЕРЕЖЕВИЧ
кандидат физмат. наук, доцент
МКРТЧЯН ГОАР ОГАНЕСОВНА
учительница физики первой категории

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ И УЧИТЕЛЕЙ
(учебно-методическое пособие)
(на армянском языке)

Ստորագրված է տպագրության՝ 27.08.2020թ.
Թուրքի օֆսեր
Չափսը՝ 60X84 1/16
Ծավալը՝ 10 մամուլ
Տպաքանակը՝ 290
Տպագրվել է «Ռուբեն Ավետիսյան» Ա/Ձ-ում
Գյումրի 2020